27.04.2015

1

Eksempel $\quad y'' + y' + y = 0$

(start~~problem~~ verdi problem) $\quad y(0) = 1$

startbetingelse: $\quad y'(0) = 2$

Randbetingelse: $\quad y(0) = 1 \qquad y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) = 2$

Generell løsning: Anta $y = e^{rx}$

sette inn: $\quad (r^2 + r + 1)y = 0$

løsning $\iff$ $\quad r^2 + r + 1 = 0$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

$y_2 = \overline{y_1}$ (kx konjugert)

Løsningene: $\quad y(x) = e^{-x/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

A, B (reelle) tall.

$$y'(x) = -\frac{1}{2}\cdot y(x) + e^{-x/2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-A\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

Startverdibetingelsene $\quad y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$:

$y(0) = \underline{A = 1} \qquad y'(0) = -\frac{1}{2}y(0) + \frac{\sqrt{3}}{2}(B) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 2.$

$-1 + \sqrt{3}B = 4$ så $\underline{B = 5/\sqrt{3}}$

$$\underline{y(x) = e^{-x/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{5}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}$$

Randverdibetingelsene: $y(0) = 1$ $\quad y\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\right) = 2$.

$y(0) = A = 1$

$$y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) = e^{-\sqrt{3}\pi/4}\left(1\,\underbrace{\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)}_{\frac{-1}{\sqrt{2}}} + B\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

(2)

$$= e^{-\sqrt{3}\pi/4}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + B\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2.$$

$$(B-1) = 2\sqrt{2}\,e^{\sqrt{3}\pi/4}$$

$$\underline{B = 2\sqrt{2}\,e^{\sqrt{3}\pi/4} + 1}$$

$$y(x) = \underline{e^{-x/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \left(2\sqrt{2}\,e^{\sqrt{3}\pi/4} + 1\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}$$

oppgave : 1) Løs diff. likningen

3

$$y' - 3y = 0$$

Anta

$y = e^{rx}$ $\quad y' = r e^{rx} = r \cdot y$ $\quad$ setter inn :

$r \cdot y - 3y = 0$ $\quad (r-3) \cdot y = 0$

så $\underline{r = 3}$ Løsningene: $\underline{y = Ae^{3x}}$ konst. $A$.

2) $y' - 3y = e^x$ $\quad y(0) = 1$.

Vi forsøker med $y = ke^x$.

$y' = ke^x = y$

$ke^x(1-3) = e^x$ , $-2 \cdot k = 1$

så $\underline{k = -\frac{1}{2}}$

$y(x) = y_p + y_h$ (én partikulær + homogene)

$$y(x) = \underline{-\frac{1}{2}e^x + Ae^{3x}}$$

Benytter betingelsen $y(0) = 1$

$y(0) = -\frac{1}{2}e^0 + A \cdot e^{3 \cdot 0}$

$= -\frac{1}{2} + A = 1$

så $A = \frac{3}{2}$.

$$y(x) = \underline{-\frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}e^{3x}}$$

3) Løs: $y' - 3y = e^{3x}$ $\qquad y(0) = 1.$

Forsøk med $y_p = kxe^{3x}$ (siden $e^{3x}$ er en homogen løsning)

4

da er $y_p' = k((x)'e^{3x} + x\cdot(e^{3x})')$

$= k(e^{3x} + 3\cdot xe^{3x}).$

setter inn: $k\cdot e^{3x} + 3\cdot y - 3\cdot y = e^{3x}$

$\underline{k=1}.$

$y_p = xe^{3x}$

Løsningene er: $\underline{y(x) = xe^{3x} + Ae^{3x}}$

~~Betd~~ Betingelsen $y(0) = 1$:

$0e^0 + A\cdot e^0 = 1$ så $A = 1$

Løsningen er $y(x) = xe^{3x} + e^{3x}$

$= \underline{(x+1)e^{3x}}.$

---

Alternativt (bruker integrerende faktor)

$(e^{-3x}y)' = e^{-3x}\cdot e^{3x} = 1$

så $e^{-3x}\cdot y = \int 1\,dx = x + c$

$\underline{y(x) = xe^{+3x} + c\cdot e^{3x}}$

oppgåve 5 (eksamen juni 2012)

5 c) $y' + 3y = \sin x$ $\quad y(0) = 0$

Løser først det homogene problemet

$$y' + 3y = 0$$

Anta $y = e^{rx}$. gir $(r+3)\cdot y = 0$

$\underline{r = -3}$

$y_h = \underline{Ae^{-3x}}$

Forsøker med $y = B\cos x + C\sin x$

$y' = -B\sin x + C\cdot\cos x$

Setter inn: $y' + 3y = 3B\cos x + 3C\sin x$ $\quad (3y)$

$C\cos x - B\sin x$ $\quad (y')$

$= \underbrace{(3B+C)}_{0}\cos x + \underbrace{(3C-B)}_{1}\sin x = \sin x$

$-3B = C$

$3C - B = 1$ $\qquad 3(-3B) - B = 1$

$-10B = 1.$

Så $B = \frac{-1}{10}$ og $C = -3B = \frac{3}{10}.$

$y_p = \frac{1}{10}(-\cos x + 3\sin x)$

Den generelle løsningen er $y(x) = \underline{\frac{1}{10}(-\cos x + 3\sin x) + Ae^{-3x}}$

Betingelsen $y(0) = 0$ gir:

$y(0) = \frac{1}{10}(-1) + A\cdot 1 = 0$ $\quad$ så $A = \frac{1}{10}.$

Løsningen er: $y(x) = \underline{\frac{1}{10}\left[-\cos x + 3\sin x + e^{-3x}\right]}$

Alternative fremgangsmåter.

1) Vi kan benytte integrerende faktorer

Da får vi $\quad (y \cdot e^{3x})' = \sin x \, e^{3x}$.

så $\quad y(x) = e^{-3x} \cdot \int \sin x \, e^{3x} \, dx$

Løser vi integralet får vi løsningene til diff. likningen.

2) Vi kan benytte at $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$.

Imaginærdelen av løsningene til $\quad y' + 3y = e^{ix} \quad (*)$

er løsningene til $\quad y' + 3y = \sin x. \quad (**)$

Anta løsningen til $(*)$ er på formen $y = ke^{ix}$ :

$y' = ike^{ix}$

$(i+3)ke^{ix} = e^{ix}$ : $\quad k = \frac{1}{i+3} = \frac{3-i}{10}$.

$y = \frac{3-i}{10} \cdot e^{ix}$.

$y_p = \operatorname{Im} \frac{3-i}{10} e^{ix} = \operatorname{Im} \frac{3-i}{10} (\cos x + i \sin x)$

$= \operatorname{Im} \left( \frac{1}{10} \left[ 3\cos x + \sin x + i(-\cos x + 3\sin x) \right] \right)$

$= \frac{-\cos x + 3\sin x}{10}$ er en partikulær løsning til $(**)$.

etc.