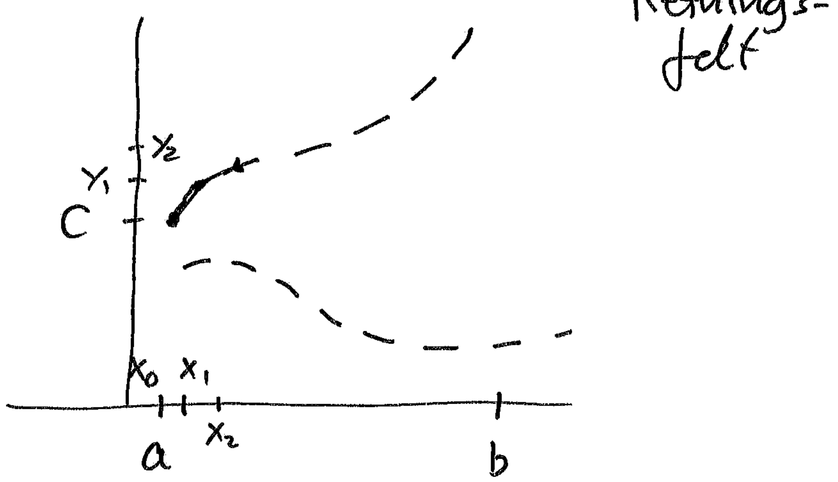
15. april 2015

Eulers metode

① 1. ordens diff. likning på formen

$$y' = F(x,y)$$



Eulers metode $\qquad x$ mellom a og b.

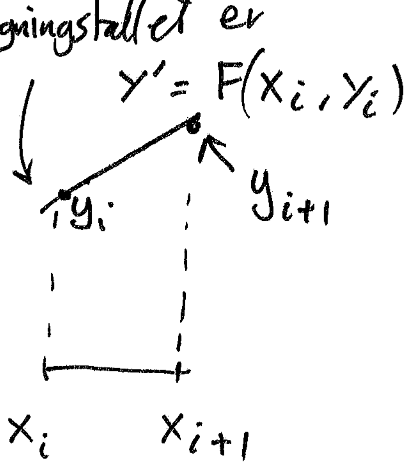
Deler intervallet $[a,b]$ i N delintervaller

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$

bredden på delintervallene : $d = \frac{b-a}{N}$.

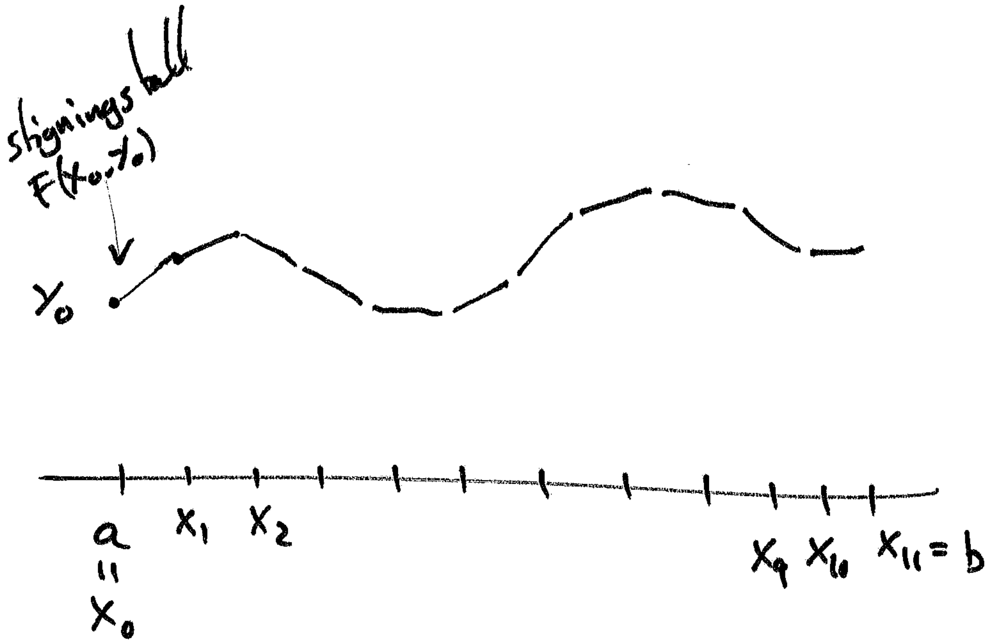
$$x_i = a + i \cdot d$$

$$F(x_i, y_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$



$$\underline{y_{i+1} = y_i + F(x_i, y_i) \cdot d}$$

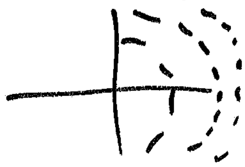
2



sjekk matlab-skriptet (emetode.m) som er lagt ut. Eulerm.m

Eulers metode er ikke så mye brukt p.g.a at den er for unøyaktig. Mer kompliserte utgaver (gjerne basert på de samme ideene) brukes.

Eulers metode bryter fullstendig sammen hvis $F(x,y)$ er veldig følsom på endringen i y. Hvis løsningene ikke går fremover hele tiden blir det problemer f.eks



$y' = -\frac{x}{y}$

fungerer ikke bra. (se m-filen)

③ Separable differensial likning.

$y' = f(x) / g(y)$ Mulig å separere x og y

$$\underbrace{g(y)}_{\text{avhenger bare av } y} \cdot y' = \underbrace{f(x)}_{\text{avhenger bare av } x}$$

Løsningene er gitt implisitt ved:

$$\underline{G(y(x)) = F(x) + C}$$

hvor G er en antiderivert til g

og F er en antiderivert til f.

Forklaring: $\frac{d}{dx}\left(G(y(x)) - F(x)\right)$

$$= G'(y(x)) \cdot y'(x) - F'(x)$$

$$= g(y(x)) \cdot y'(x) - f(x)$$

$y(x)$ er en løsning til diff. likningen $g(y)\, y' = f(x)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(G(y(x)) - F(x)\right) \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \quad G(y(x)) = F(x) + c \qquad c \text{ konstant.}$$

Vanlig skrivemåte:

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$g(y)\, dy = f(x)\, dx$$

$$\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx$$

$$G(y(x)) + C_1 = F(x) + C_2$$

$$\underline{G(y(x)) = F(x) + C}$$

$$(C = C_2 - C_1)$$

Eksempler

4

$$y' = k \cdot y$$ separabel

$$\frac{y'}{y} = k$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dx$$

$$\ln|y| = kx + c$$

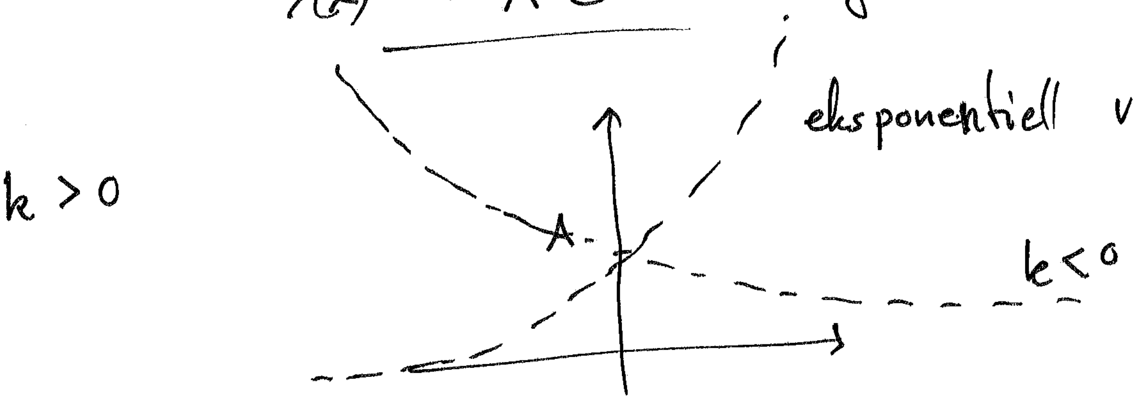
$$e^{\ln|y|} = e^{kx+c}$$

$$|y| = (e^c) \cdot e^{kx}$$

$$y(x) = (\pm e^c)\, e^{kx}$$

$y(x) \equiv 0$ er også en løsning.

$$\underline{y(x) = A e^{kx}}$$ for et reelt tall A.



Enkel modell for populasjonsvekst: $y' = ky \quad k > 0$

Nedbrytning (radioaktiv) : $y' = -ky \quad k > 0$

Logistisk diff. likning.

5 $\quad y'(t) = k\, y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{N}\right)$ $\qquad k > 0$, $N > 0$

y er liten : $y' \sim k \cdot y$

når y nærmer seg N så vil $y' \to 0$.

veksten stopper opp. (vi passerer ikke verdien N).

separabel diff. likning:

$$\frac{y'}{y\left(1 - \frac{y}{N}\right)} = k$$

$$\int \frac{1}{y(1 - y/N)}\, dy = k t + c.$$

$$\int \overbrace{\frac{1}{y} + \frac{1/N}{\left(1 - \frac{y}{N}\right)}}\, dy$$

$$= \ln|y| + -\ln\left|1 - \frac{y}{N}\right| = kt + c$$

$$\ln\left(\frac{y}{1 - y/N}\right) = k \cdot t + c$$

$$\left|\frac{y}{1 - y/N}\right| = e^{kt} \cdot e^{c}$$

$$\frac{y}{1 - y/N} = A e^{kt}$$

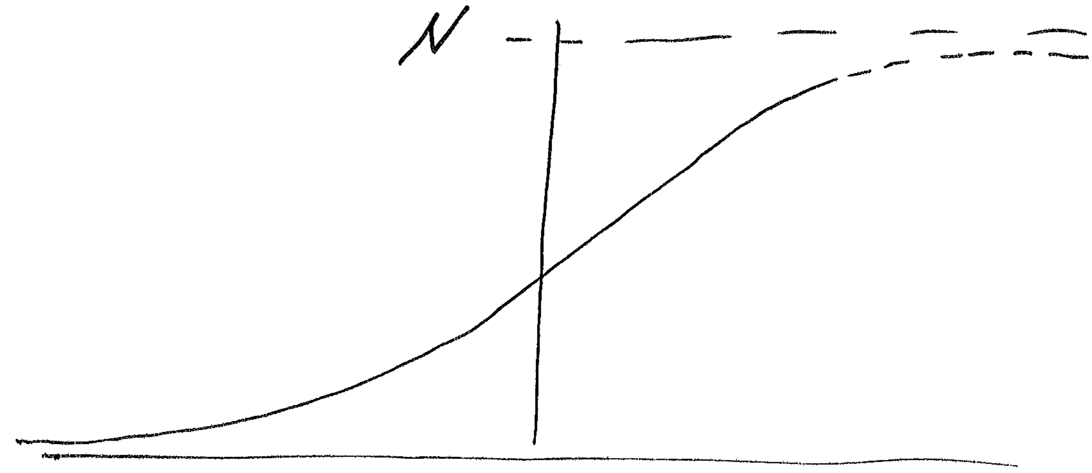
$$y = \left(1 - \frac{y}{N}\right) A e^{kt} = A e^{kt} - y \cdot \frac{A}{N} e^{kt}$$

$$y\left(1 + A \cdot \frac{1}{N} e^{kt}\right) = A e^{kt}$$

$$Y(t) = \frac{Ae^{kt}}{1 + A\cdot\frac{1}{N}e^{kt}} \cdot \frac{N}{N} = N\,\frac{Ae^{kt}}{N + Ae^{kt}}$$

6

$$= N\,\frac{1}{(N/A)e^{-kt} + 1}$$



Initialverdi problem:

Hva skjer hvis $Y_0 > N$?

$Y_0 < 0$?

Anta $Y_0 = Y(0)$ er kjent.

$$Y_0 = N\,\frac{1}{(N/A)\cdot 1 + 1}$$ så

$$\frac{N}{A}Y_0 + Y_0 = N$$

$$N/A = (N - Y_0)/Y_0$$

Løsningen er

$$Y(t) = N\,\frac{1}{\frac{N-Y_0}{Y_0}e^{-kt} + 1}$$

En annen beskrivelse av løsningene er:

$$Y(t) = N\,\frac{1}{1 + e^{-k(t-t_0)}}$$

hvor t_0 er tiden hvor $Y(t) = N/2$.

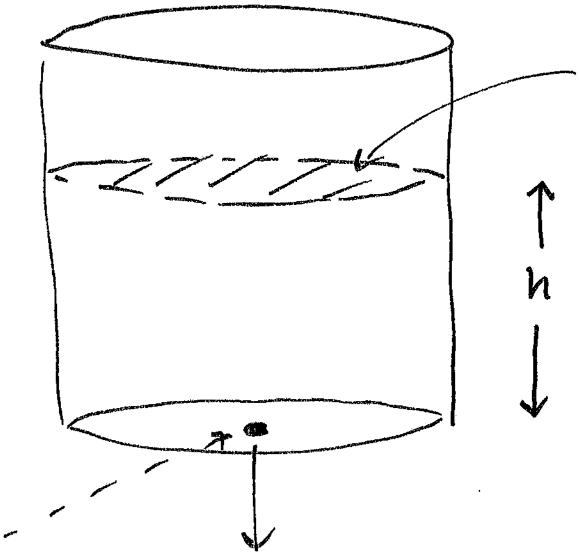
(hvis $0 < Y_0 < N$)

Torricellis lov

Vi viser hvordan vi kommer frem til diff. likningen

~~8~~

7



tverrsnittareal $A(h)$

$a << A(h)$ "mye mindre enn"

areal a

V volum. $\frac{dV}{dt}$ volum endring.

$$\frac{dV}{dt} = - v \cdot a$$

v fart til væsken som renner ut

tap i potensiell energi /per tids enhet (ρ massetetthet.)

er $gh \, (\underbrace{\rho \frac{dV}{dt}}_{\text{masse/tid}})$

kinetisk energi til det som renner ut / per tid

er $\frac{1}{2}\left(\rho \cdot \frac{dV}{dt}\right)\left(\frac{dV}{dt}\frac{1}{a}\right)^2$

$$\frac{dV}{dt} = A(h) \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$gh\rho \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{dV}{dt}\right)^3 \frac{1}{a^2}$$

$$2gh\,a^2 = \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = A^2(h)\left(\frac{dh}{dt}\right)^2$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-a}{A(h)}\sqrt{2gh}$$

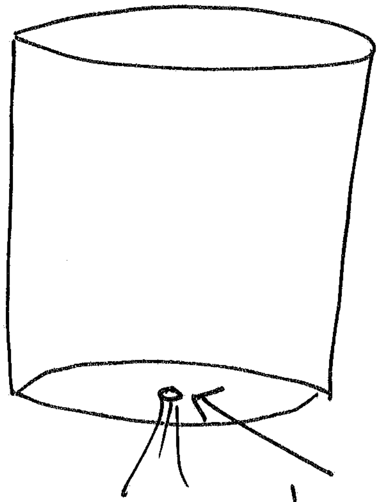
$\left(\frac{dh}{dt} < 0\right)$

Eksempel

(8)

Sylindrisk beholder

$A(h) = A$ konstant tverrsnittareal



tverrsnitt-arealet til åpningen er a.

Torricellis lov:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-a}{A(h)} \sqrt{2gh}$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{dh}{dt} = \frac{-a}{A} \sqrt{2g}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}} dh = \int \frac{-a}{A} \sqrt{2g}\, dt$$

$$2h^{1/2} = \frac{-a}{A} \sqrt{2g}\, t + c$$

Høyden ved tiden $t=0$ er h_0. så $c = 2\sqrt{h_0}$.

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \frac{a}{2A} \sqrt{2g}\, t. \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\underline{h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}\, t\right)^2}$$

Tiden det tar å tømme beholderen er derfor

$$T = \frac{\sqrt{h_0}}{\frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}} = \underline{\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \frac{A}{a}}$$

Eksempler:

Sylindrisk beholder: $A(h)$ konstant lik A.

$$h' = \frac{-a}{A}\sqrt{2gh}$$

(9)

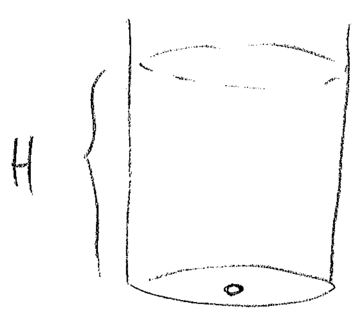
$$\int \frac{h'}{\sqrt{h}}\,dt = \int \frac{-a}{A}\sqrt{2g}\,dt$$

$$\int h^{-1/2}\,dh = 2\cdot h^{1/2} = \frac{-a}{A}\sqrt{2g}\,t + c$$

$c = 2\sqrt{h_0}$ hva h_0 er høyden ved tiden t.

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{a}{A}\frac{\sqrt{2g}}{2}t\right)^2.$$ (Frem til h blir 0)

Tiden det tar å tømme beholderen er derfor $T = \frac{2A}{a\sqrt{2g}}\cdot\sqrt{h_0}$



Diameter 10cm (flaskehøyd 20cm)

Høyde $H_0 = 20$cm

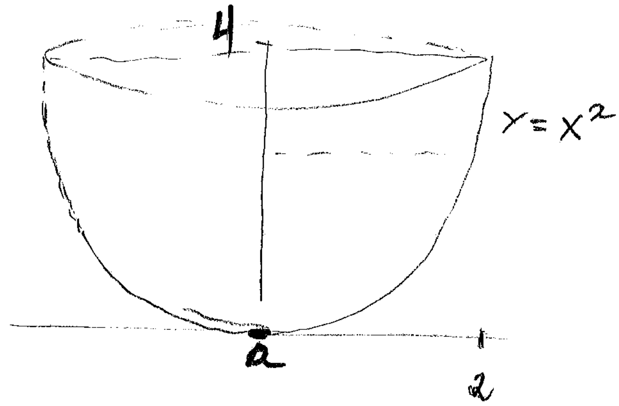
Lager et hull med diameter 1cm.

Tiden det tar for vesken å renne ut er:

$$T = \frac{2\cdot\pi(10/2)^2}{\pi(1/2)^2\sqrt{2\cdot 9{,}8}}\sqrt{0{,}2} = \frac{200\cdot\sqrt{2}\sqrt{0{,}1}}{\sqrt{2\cdot 9{,}8}}$$

$$\sim 200\cdot\frac{1}{\sqrt{10\cdot 9{,}8}} \sim \frac{200}{10} \sim 20\text{sek}.$$

Eksempel:



$x = \sqrt{y}$

10

Beskriv $h(t)$

$$A = \pi r^2 = \pi \sqrt{h}^2$$

$$h' = \frac{-a}{\pi \cdot h}\sqrt{2gh}$$

$$\sqrt{h}\,h' = \frac{-a}{\pi}\sqrt{2g} = -k \qquad k > 0$$

$$\frac{2}{3} h^{3/2} = -kt + c$$

$$h = \left(-\frac{3}{2}kt + c'\right)^{2/3}$$

$$h = \left(h_0^{3/2} - \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2g}\,a}{\pi}\right)t\right)^{2/3}$$

spesielt er tiden det tar å tømme beholden lik $\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2g}\cdot a}\cdot h_0^{3/2}$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot A_0}{a\sqrt{2g}}\right)\sqrt{h_0}$$

$A_0 = A(h_0) = \pi h_0$

Dette er $1/3$ av tiden det tar å tømme tanken som er sylindrisk med tverrsnittsareal lik arealet $A(h_0)$.