5. mars 2015

9.4

Eksempel

(1)
$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -2$$

$$\underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}} \underset{4\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

Gauss eliminasjon (av utvida matrise)

Bytter radene : $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right] -2$

$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 5 \end{array}\right]$ trappeform (-1)

ledende element

$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -5 \end{array}\right] 1$

$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -5 \end{array}\right]$ redusert trappeform.

$$x_1 + 2x_2 - 7x_4 = -7$$
$$x_3 - 6x_4 = -5$$

x_4 fri $\quad x_3 = -5 + 6x_4 \;, \quad x_1 = -7 - 2x_2 + 7x_4$

x_2 fri $\quad$ Løsningene parametrisert ved x_2 og x_4.

Løsningene er et plan i $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partikulær} \\ \text{løsning}}}{\begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} x_4}_{\text{homogene løsninger.}}$$

2

En løsning til $A\vec{x} = \vec{b}$ kalles en partikulær løsning.

En løsning til $A\vec{x} = \vec{0}$ kalles en homogen løsning.

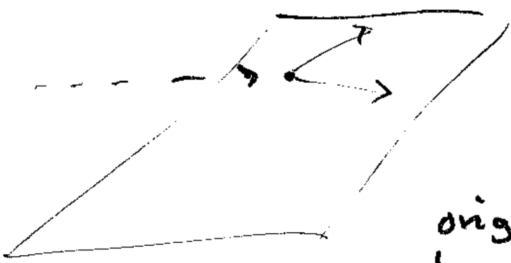
$\vec{x}$ og $\vec{y}$ løsninger til $A\vec{x} = \vec{b}$,

da er $A(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$

så $\vec{x} - \vec{y}$ er en homogen løsning.

Hvis $\vec{z}$ er en homogen løsning og $\vec{y}$ en partikulær løsning, da er $\vec{y} + \vec{z}$ en partikulær løsning.

partikulær løsning



planet forskyvd så det går gjennom origo er de homogene løsningene.

Vi ser her på to eksempler. Først med verdien 2 her, så med verdien (10). justerer likningssystemet

3

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= 2\,(10) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 4 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4 \\ -2 \end{array}$$

(10)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & 14 & 18 \\ 0 & -7 & 14 & 8 \end{array}\right] -1$$

16

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & 14 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

0

ingen løsning ($0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 = -8$ aldrig sant)

Løsningen er tom.

I det justerte likningssystemet er det uendelig mange løsninger :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & 14 & 16 \end{array}\right] (-\tfrac{1}{7})$$

overføre det til redusert trappeform

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{16}{7} \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{-5}{7} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{16}{7} \end{array}\right]$$

partikulær løsning homogen løsning

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 \\ -16 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

(4)

$$x_1 \quad - x_3 = \frac{-5}{7}$$

$$x_2 - 2x_3 = \frac{-16}{7}$$

flytte x_3-leddene over til høyreside av =-tegnet

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-5}{7} + x_3 \\ x_2 &= \frac{-16}{7} + 2x_3 \\ x_3 &= \qquad\quad x_3 \end{aligned} \quad = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 \\ -16 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

9.5

Vektorrom $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^n$ er eksempler på vektorrom.

Et vektorrom har:

V addisjon skalarmultiplikasjon.

(5) additive invers elementer.

0-vektor.

La $V_1, V_2, \ldots V_n$ være elementer i V

Vektorene utspenner vektorrommet hvis alle vektorene i V kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av $V_1, \ldots, V_n$:

Alle vektor i V: $\vec{V} = c_1 \vec{V}_1 + \cdots + c_n \vec{V}_n$

for skalarer $c_1, \ldots c_n$

$\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$ er <u>lineært uavhengige vektorer</u>

hvis $c_1 \vec{V}_1 + \cdots + c_n \vec{V}_n = \vec{0}$

fører til at $c_1, \ldots c_n$ alle må være lik 0.

Hvis de ikke er lineært uavhengige da finnes det $c_1, \ldots c_n$ slik at minst en av c_i-ene er ulik 0 (anta $c_1 \neq 0$)

$$c_1 \vec{V}_1 + c_2 \vec{V}_2 + \cdots + c_n \vec{V}_n = \vec{0}$$

Så $$\vec{V}_1 = -\frac{c_2}{c_1} \vec{V}_2 + \cdots + \frac{-c_n}{c_1} \vec{V}_n .$$

Så minst en av vektore kan uttrykkes ved hjelp av de andre.

(6) En **basis** for V er en samling lineært uavhengige vektorer som utspenner V.

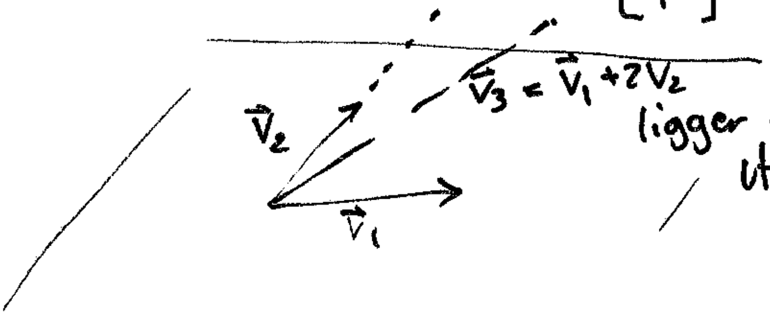
$V = \mathbb{R}^3$ standar basis $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

En generell vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Er vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

en basis for $\mathbb{R}^3$?

Nei, fordi $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.



ligger også i planet utspent av $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$

Dimensjonen til et vektorrom er minste antall vektorer vi behøver for å utspenne vektorrommet.
Det er lik antall vektorer i en basis for vektorrommet.

Lineære transformasjoner

(7) $T : V \to W$ V, W vektorrom

T er en lineær transformasjon (funksjon) hvis T respekterer addisjon og skalar multiplikasjon

$$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(v_2)$$

$$T(c\vec{v}) = c\,T(\vec{v})$$

En lineær transformasjon er bestemt av transformasjonen av et sett med basisvektorer.

La $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ være basisvektorer for V

For alle $\vec{v}$ i V så finnes det (entydige) skalarer $c_1, \ldots c_n$

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n.$$

$$T(\vec{v}) = T(c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n)$$

$$= c_1 T(\vec{v}_1) + \cdots + c_n T(\vec{v}_n).$$

$T(\vec{v})$ er bestemt av $T(\vec{v}_1) \ldots T(\vec{v}_n)$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$

basisvektorer

3-vektorer

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = x\,T(\vec{e}_1) + y\,T(\vec{e}_2).$$

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(e_1), T(e_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ matrise multiplikasjon

Element i,j i matrisen er komponent i i $T(e_j)$

Her er $T(e_1)$ og $T(e_2)$ i W uttrykt

som 3er søylevektorer i basisen f_1, f_2, f_3 til W.

8

Alle 3×2-matriser M gir en lineær transformasjon
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved matrisemultiplikasjon

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sendes til $M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

sammensetning av lineære transformasjon:

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{S} U$$

sammensetningen av to lineære trans. er en lineær trans.

Velger basis i de tre vektorrommen

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "M"'] \arrow[rr, bend left, "N \cdot M"] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "N"'] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

M: $n \times m$ matrise

N: $p \times n$ matrise

den sammensatte lin. trans. $S \circ T$ på matriseform er gitt ved matrise-multiplikasjon $N \cdot M$
$p \times m$ matrise.

(For detaljer se vedlegg side 9.)

Eksempler på vektorrom og lin. trans.

$V =$ polynomer.

∞ dimensjonalt

basisvektorer $1, x, x^2, x^3 \ldots$

(tillater bare end. antall av koeff. lik å være ulik 0)

Derivasjon $\frac{d}{dx} : V \to V$ er en lineær trans.

(9) $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m \xrightarrow{S} \mathbb{R}^r$

$S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ er også en lin. trans.

$\vec{e}_i$ i $\mathbb{R}^n$ sendes til $T(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} T_{ji} \vec{e}_j$ i $\mathbb{R}^m$.

$\vec{e}_j$ i $\mathbb{R}^m$ sendes til $S(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{r} S_{kj} \vec{e}_k$

Sammensetningen:

$$S \circ T (\vec{e}_i) = S\left(\sum_{j=1}^{m} T_{ji} \vec{e}_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} T_{ji} \; S(\vec{e}_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} T_{ji} \; S_{kj} \; \vec{e}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} S_{kj} \cdot T_{ji} \right)}_{\text{element } (k,i)} \vec{e}_k$$

til $S \cdot T$ ganget sammen med matrisemultiplikasjon.

Søyle nr. i i matrisen $S \cdot T$:

$$\begin{bmatrix} \sum_j S_{1j} T_{ji} \\ \vdots \\ \sum_j S_{rj} T_{ji} \end{bmatrix} = S \cdot T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

← posisjon i svarer til $\vec{e}_i$

Venstremult. med $\vec{e}_i$ plukker ut søyle nr. i.