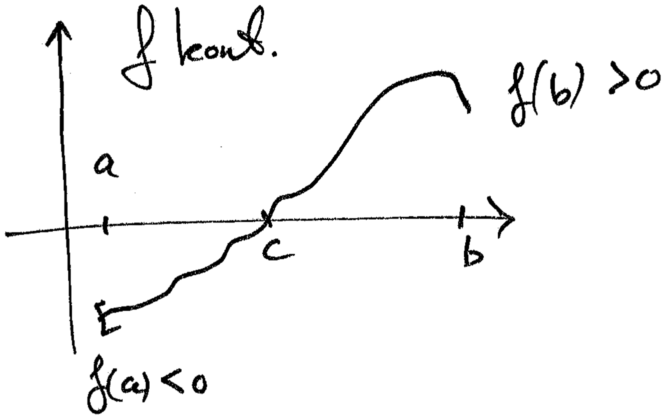
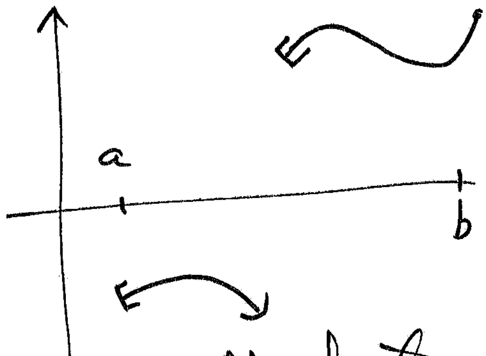
21.01.2015

Skjæringssetningen

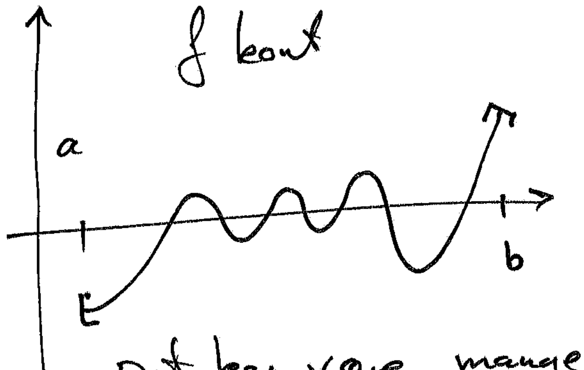
Anta $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon på $[a,b]$.
Hvis $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn,
da finnes det en $c \in (a,b)$ slik at $\underline{f(c) = 0}$

[En verdi x s.a. $f(x) = 0$ kalles et <u>nullpunkt</u> til f]

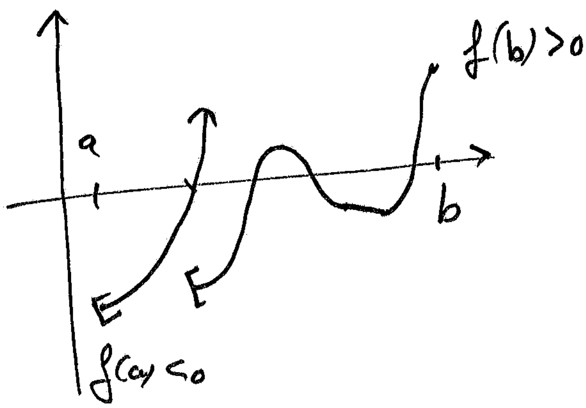


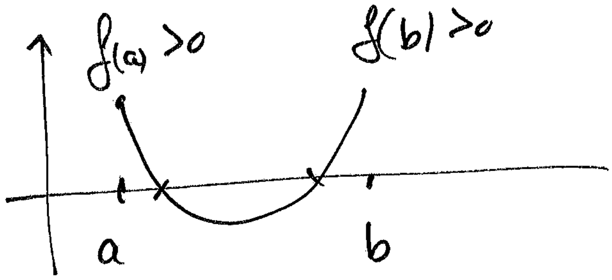


f ikke kont.



Det kan være mange nullpunkt.





2 nullpunkt.

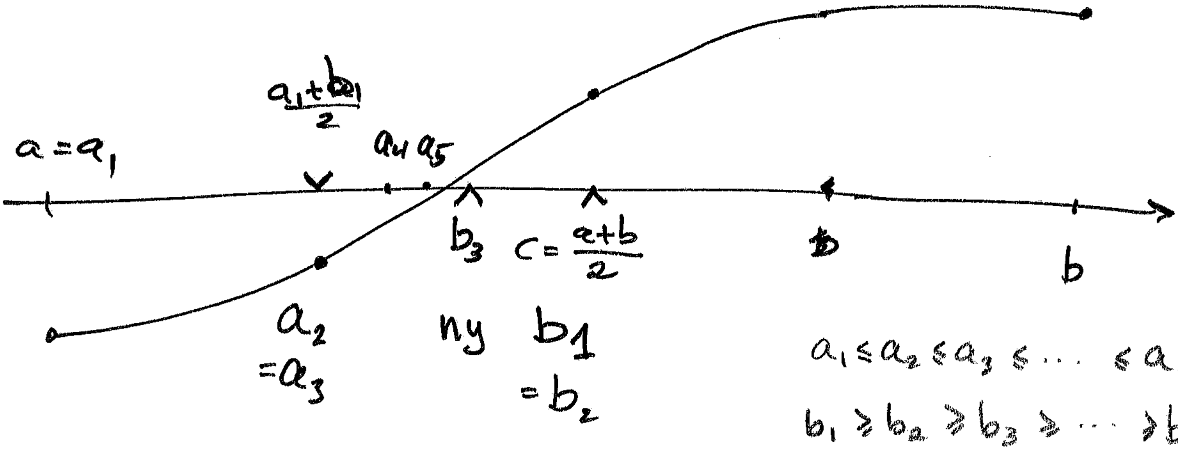
Skjæringssetningen er et eksistensteorem. Det sier ikke noe om hvordan vi kan finne nullpunktene i $[a,b]$.

$f(a)$, $f(b)$ har motsatt fortegn : $f(a) \cdot f(b) < 0$

Hvordan finner vi nullpunktet?

En enkel metode: Halveringsmetoden (midtpunktsmetoden)

f kontinuerlig i $[a, b]$ $\quad f(a) \cdot f(b) < 0$



$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n < b_n$

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$

$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ nullpunkt mellom a_n og b_n. f kont.

Starter med $a < b$

Antar $f(a) \cdot f(b) < 0$

1) $c = \frac{a+b}{2}$ punktet midt mellom a og b

2) $f(c) = 0$ da har vi funnet et nullpunkt!

3) $f(c) \neq 0$

Hvis $f(a) \cdot f(c) > 0$ erstatt a med c (verdien til)

ellers erstatt b med (verdien til) c

Gjenta prosedyren med nye a og b.

Vi lagde til et script som utfører denne algoritmen.

.m-filen med scriptet legges ut senere.

Skjæringssetningen gir eksistens av n-te røtter.

$f(x) = X^n - m$ nullpunkt >0 til $f(x)$ er ~~en~~ n-te roten av m. $\sqrt[n]{m}$

$m > 1$ $n \geq 2$ naturlig tall

$f(1) = 1^n - m < 0$ $f(m) = m^n - m > 0$

$f(x)$ er kont for $x \geq 1$ (alle x).

Ved skjæringssetningen finnes det en $x > 1$

s.a $x^n = m$. Det er $\sqrt[n]{m}$.

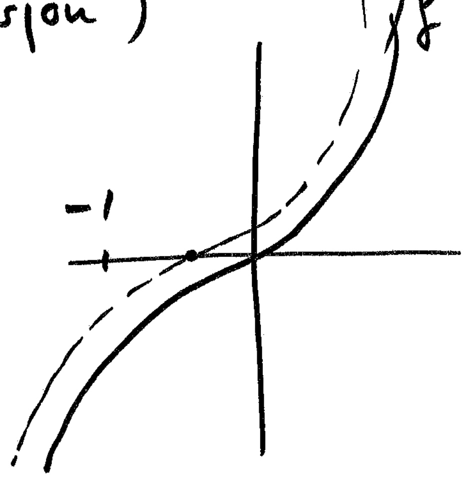
22.01.2015

$f(x) = x^3 + x = x(x^2+1)$ kontinuerlig.

Nullpunkt $x = 0$

$f(x) < 0$ når $x < 0$ $f(x) > 0$ når $x > 0$

$(f(x) = -f(-x)$ odde funksjon$)$



$g(x) = x^3 + x + 1$

$g(-1) = -1 < 0$

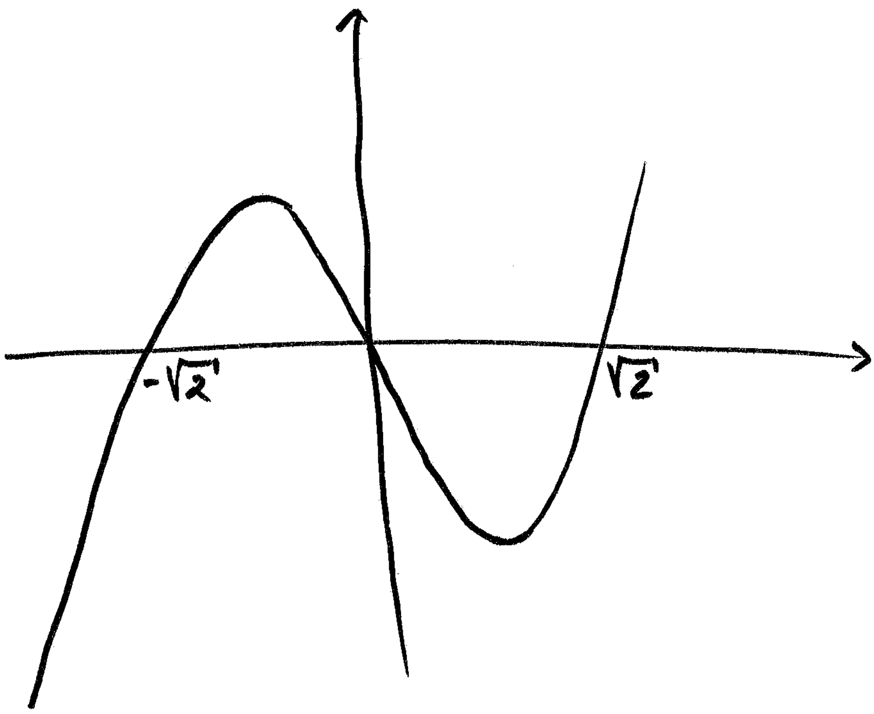
$g(0) = 1 > 0$

Vi implementerte halveringsmetoden og regnet ut estimat for nullpunktet

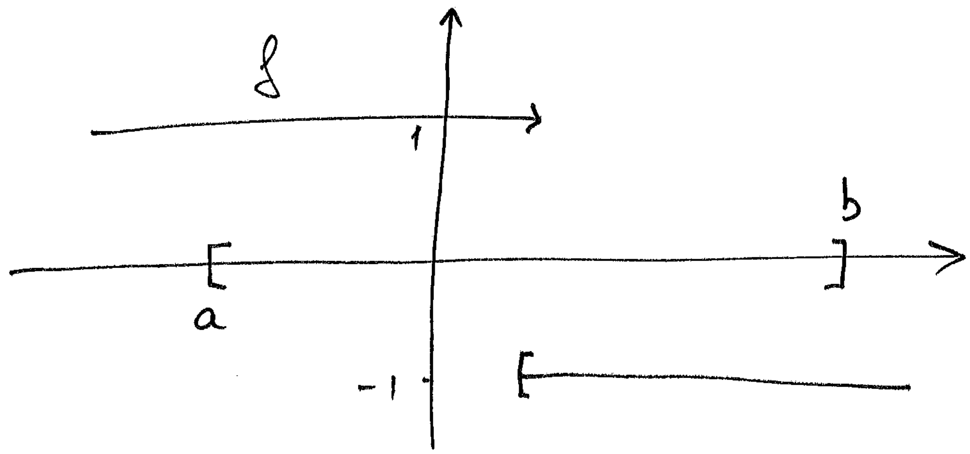
$h(x) = x^3 - 2x = x(x^2-2)$
$= x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

$h(-x) = -h(x)$

Røttene er $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.



Hva skjer når f ikke er kontinuerlig



Hvor nøyaktig er halveringsmetoden?

$[a, b]$ halveres $[a_1, b_1]$ halveres $[a_2, b_2]$

$\ldots$ halveres $[a_N, b_N]$

$$\underline{b_n - a_n} = \frac{b-a}{2^N}$$

$2^{10} = 1024$

$2^{20} = (2^{10})^2 = 1048576 \sim 10^6$

$2^{30} \sim 10^9$

$2^{40} \sim 10^{12}$

Vi kan lage en kvadratrot funksjon

$f(x) = x^2 - m, \; m > 0$

$a = 0$

$b = m + 1$

$f(0) = -m < 0$

$m < 1 \quad \sqrt{m} < 1 < b$

$m \geq 1 \quad \sqrt{m} \leq m < b$

så $f(b) > 0$.

Halveringsmetoden gir en tilnærming til $\sqrt{m}$ med nøyaktighet $(m+1)/2^N$, N iterasjoner