

Derivasjon

Den deriverte til en konstant funksjon er lik 0 (grafene er en horisontal linje). Den deriverte til en potensfunksjon x^r er lik rx^{r-1} . Den deriverte til eksponentfunksjonen e^x er lik funksjonen e^x selv. Den deriverte til den naturlige logaritmefunksjonen $\ln(x)$ er lik $1/x$. Derivasjon er lineær $(kf(x))' = kf'(x)$ for en konstant k , og derivasjon av en sum er lik summen av de deriverte til leddene $(f + g)' = f' + g'$.

Deriver følgende funksjoner (dere kan sjekke svaret ved å symbolsk derivere funksjonene i for eksempel Geogebra).

1. $6x^7$
2. $5x^3 - 2x^2 + 7x - 12$
3. $3x^4 - (3x)^4$
4. $3x^{4,78}$
5. $7/x^2$
6. $\sqrt[4]{x}$
7. $\frac{3}{\sqrt{x}}$
8. $3e^x - 4\ln(x)$
9. $x^e + e^x$
10. $x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x}$ (Uttrykk gjerne først funksjonen som en potensfunksjon av x .)

En sammensatt funksjon $f(u(x))$ består av en indre funksjon $u(x)$ (kjernen) som er satt inn i en ytre funksjon f . Definisjonsmengden til den sammensatte funksjonen er alle x i D_u slik at $u(x)$ ligger i D_f . Den deriverte til en sammensatt funksjon kan beskrives fra den deriverte til den ytre funksjonen og den deriverte til kjernen som følger:

$$\mathbf{Kjernerregelen} \quad (f(u(x)))' = f'(u(x))u'(x)$$

Kjernerregelen uttrykt ved bruk av Leibniz notasjon for den deriverte er

$$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{du(x)}{dx}$$

Når dere benytter kjernerregelen, anbefaler eg at dere starter ytterst og deriverer den ytre funksjonen. Skriv gjerne opp kjernen derivert (uten å derivere den). Det er da lettere for leseren å følge utregningen. Deretter deriveres kjernen. Hvis dere har en funksjon med mer enn to sammensetninger, så starter dere med den ytterste funksjonen og benytter kjernerregelen gjentatte ganger. Her er et eksempel på bruk av kjernerregelen:

$$\begin{aligned} ((3x^5 - 2x^2 + 6)^3)' &= 3(3x^5 - 2x^2 + 6)^2(3x^5 - 2x^2 + 6)' \\ &= 3(3x^5 - 2x^2 + 6)^2(15x^4 - 4x) \end{aligned}$$

1. $(2 + 3x)^2$

Finn den deriverte både ved først å gange ut, og ved å benytte kjerneregelen med $2 + 3x$ som kjerne.

2. e^{3x+4}

3. $\ln(5x)$

4. $\ln|x|$ for alle $x \neq 0$

5. $\ln|x^3 - x|$

6. $2(1 - 2x + x^4)^6$

7. $\frac{5}{3 + x^2}$

8. $\sqrt{2x + 7}$

9. $\frac{3}{2 + \sqrt{2x + 7}}$

10. $\ln(2 + \ln(4 - 3x))$

Produktet av to funksjoner f og g er en funksjon som sender x til produktet av $f(x)$ og $g(x)$. Vi skriver produktet som $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Definisjonsmengden til produktfunksjonen er snittet av definisjonsmengdene til hver av funksjonene. Den deriverte til et produkt av to funksjoner er bestemt av den deriverte til hver av dem.

Poduktregelen $(fg)' = f'g + fg'$

1. $(2 + 3x)(2 + 3x)$

Benytt produktregelen med $f = g$ lik $(2 + 3x)$

2. $x^5 e^x$

3. $e^x \ln|x|$

4. $x^3 \ln|x|$

5. $x\sqrt{8 - x}$

6. $(2 - 9x)^2 e^{4x}$

7. $e^{x^2} \ln|2x + 9|$

8. $\frac{e^{3x}}{1 - x}$

9. $\frac{5x}{1 + x^2}$

10. $x^3 \sqrt{2x + 7} e^{2x}$