

Oppgaver Forkurs Matematikk OsloMet  
12. august 2025 Halvard Fausk

Forsøk å løse oppgavene uten bruk av hjelpemiddel

Et primtall er et heltall som er større enn eller lik 2 og som kun er delelig med seg selv og 1. De første primtallene er

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \dots$$

Alle naturlige tall er et produkt av primtall. Et fundamentalt resultat sier at primtallene som forekommer i primtallsfaktoriseringen av et tall samt antall ganger de forekommer, er bestemt av tallet. Vi sier at positive heltall har entydig primtallsfaktorisering. For eksempel er  $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ . Tallet 1 er produktet av ingen primtall.

**Oppgave 1.** Faktoriser de følgende naturlige tallene som produkt av primtall

$$6 \quad 30 \quad 68 \quad 91 \quad 256 \quad 1000 \quad 44100$$

**Oppgave 2.** Finn alle primtallene som er mindre enn 100. Forsøk å skrive hver av partallene 4, 6, 8,  $\dots$ , 38, 40 som en sum av to primtall.

**Oppgave 3.** Det finnes uendelig mange primtall. Forsøk å forstå (fyll inn detaljer) i følgende bevis:

Anta at det bare finnes et endelig antall primtall  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Vis at denne antakelsen leder til en selvmotsigelse siden

$$p_1 p_2 \dots p_n + 1$$

er et tall større enn hvert av primtallene  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , som ikke er delelig med noen av dem. Dette er ikke mulig. Vi konkluderer med at det må være uendelig mange primtall.

To primtall med en differanse lik 2 kalles *tvillingprimtall*. Fra listen ovenfor er 3 og 5, 5 og 7, 11 og 13, 17 og 19, 29 og 31, 41 og 43 tvillingprimtall.

Det er flere enkle spørsmål om primtall vi ikke kjenner svaret til. For eksempel: Finnes det uendelig mange tvillingprimtall?

Et annet slikt spørsmål er Goldbach sin formoding: Er alle partall større enn 2 lik en sum av to primtall?

Addisjon og multiplikasjon er *kommutative*. Det vil si at

$$a + b = b + a \quad \text{og} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

for alle tall  $a$  og  $b$ . De er også *assosiative*. Det vil si at rekkefølgen to og to tall legges sammen (eller ganges sammen) er likegyldig

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{og} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

for alle tall  $a, b$  og  $c$ .

På grunn av dette oppgir vi ikke i hvilke rekkefølge to og to tall skal legges sammen. Vi skriver bare  $a + b + c + d$  istedenfor for eksempel  $((a + b) + c) + d$ .

**Oppgave 4.** Regn ut summen (dra nytte av at dere ikke behøver å utføre regneoperasjonene fra venstre mot høyre)

$$12 + 46 - 17 + 4 + 37 + 8 \\ -44 + 457 + 744 - 389 + 43 - 11$$

Regneoperasjonene subtraksjon og divisjon er ikke kommutative eller assosiative. Det kan dere observere ved å regne ut følgende:

$$2 - 3 \text{ og } 3 - 2 \quad \text{samt} \quad 5 - (3 - 2) \text{ og } (5 - 3) - 2 \\ 1/2 \text{ og } 2/1 \quad \text{samt} \quad 2/(5/4) \text{ og } (2/5)/4$$

Det at addisjon og multiplikasjon er assosiativ lar oss utelate mange parenteser. Vi har noen regnekonvensjoner som lar oss utelate enda flere parenteser i uttrykk. For eksempel er det universell enighet om at  $2 \cdot 3 + 5$  skal tolkes som  $(2 \cdot 3) + 5$  (og ikke som  $2 \cdot (3 + 5)$ ).

1. Først regnes parentesene ut
2. deretter potenser
3. så multiplikasjon (og divisjon), og til sist
4. addisjon (og subtraksjon).

Vi tenker gjerne på subtraksjon som en addisjon, og divisjon som en multiplikasjon

$$a - b = a + (-b) \quad \text{og} \quad a/b = a \cdot (1/b)$$

For eksempel er subtraksjonen  $3 - 5$  lik summen av tallene 3 og  $-5$ . Divisjonen  $3/5$  er lik produktet av tallene 3 og  $1/5 = 0.2$  (en femdel).

Et uttrykk som  $2 - 3 - 5$  tolkes som addisjonen  $2 + (-3) + (-5)$ . (Alternativt så utføres addisjon og subtraksjonen fra venstre til høyre.) Et fortegn tolkes som en multiplikasjon  $-a = (-1) \cdot a$ . Potensopphøying utføres før multiplikasjon, derfor tolkes  $-3^2$  som

$$(-1) \cdot 3^2 = -1 \cdot (3^2) = -9$$

Mener vi kvadratet av tallet  $-3$ , må vi benytte parenteser  $(-3)^2 = 9$ . Her er noen oppgaver hvor dere kan øve på å tolke hva som menes med uttrykkene.

**Oppgave 5.** Finn tallene lik (regn ut)

$$2 - 3 - 4 + 5 \quad 2 - (3 - 4) + 5 \quad 2 - 3 - (4 + 5)$$

**Oppgave 6.** Finn heltallene lik (regn ut)

$$a) 3 \cdot 2^2 \text{ og } 32^2 \text{ og } (3 \cdot 2)^2 \quad b) (2 + 3)^3 \text{ og } 2 + 3^3 \quad c) 2 - 3^2 \text{ og } 2 + (-3)^2$$

**Oppgave 7.** Finn de to heltallene i hver deloppgave (regn ut)

$$a) 2(3 + 4) \text{ og } 2 \cdot 3 + 4 \quad b) (-2)^4 \text{ og } -2^4 \quad c) -3(5 - 2) \text{ og } -3 \cdot 5 - 3 \cdot 2$$

**Oppgave 8.** Gang ut parentesene

$$a(b + c) \quad a(b - c) \quad -a(b + c) \quad -a(b - c)$$

**Oppgave 9.** Lær de 12 første heltallspotensene av 2 utenatt.

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128$$

$$2^8 = 256, 2^9 = 512, 2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048, 2^{12} = 4096$$

**Oppgave 10.** Regn ut

$$3 - 4(-7) \quad 71 - 32 - 31 \quad -(-2)^8 \quad 2^3(-2)^3$$

**Oppgave 11.** Regn ut

$$4/3 + 1 \quad 7 - 13/3 \quad 87(17 + 18 - 33) \quad -3(-5) - (-3 - 5)$$

## Forholdstall

**Oppgave 12.** Finn de fire summene og forkort svarene

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{2} \quad \frac{3}{5} + 2\frac{3}{7} \quad \frac{3}{5} - \frac{3}{8} \quad \frac{21}{35} + \frac{24}{56}$$

**Oppgave 13.** Finn de fire produktene og forkort svarene

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}} \quad \frac{9}{7} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \frac{20}{27} \cdot \frac{3}{8} \quad \frac{21}{35} \cdot \frac{24}{56}$$

**Oppgave 14.** Skriv svarene som en forkortet brøk

$$3 + \frac{7}{4} \quad 2 - \frac{13}{4} \quad 4\frac{7}{8} + \frac{5}{-6} \quad \frac{23}{45} + \frac{24}{72}$$

**Oppgave 15.** Skriv de følgende tallene som en forkortet brøk

$$(2^3)^{-1} \quad 3^8 \cdot 3^5 \cdot 3^{-10} \quad \frac{5^3 \cdot 5^5 \cdot (1/5)}{(5^2)^3} \quad \frac{6^7 \cdot 2^{-5}}{3^8}$$

**Oppgave 16.** Stokk om på de følgende rasjonale tallene slik at de blir ordnet etter størrelse. Det minste tallet skal være lengst til venstre (økende rekkefølge)

$$1/3 \quad 1/2 \quad -3/4 \quad 3/5 \quad 7/11 \quad 0/5 \quad 4/7$$

Her er en mer krevende oppgave.

**Oppgave 17.** Forklar hvorfor  $\sqrt{2}$  er et irrasjonalt tall. Det vil si at det er et reelt tall (ligger på tallinjen) men er ikke et rasjonalt tall (forholdstall). Hint: Forklar at et heltall  $n$  er et kvadrat av et annet heltall hvis og bare hvis hvert primtall i primtallfaktoriserings til  $n$  forekommer et jevnt antall ganger.

Anta at  $\sqrt{2} = a/b$ . Da er  $2b^2 = a^2$ . Bruk dette til å vise at  $\sqrt{2}$  ikke er et rasjonalt tall (det kan ikke være lik en brøk).

Mer generelt vis at  $\sqrt{n}$  enten er et heltall eller et irrasjonalt tall for alle naturlige tall  $n$ . Det er et irrasjonalt tall presis når minst ett av primtallene i primtallsfaktoriserings til  $n$  forekommer et odde antall ganger.

Avgjør hvilken av tallene

$$\sqrt{7} \quad \sqrt{81} \quad \sqrt{52} \quad \sqrt{1} \quad \sqrt{28}$$

som er heltall og hvilken som er irrasjonale tall.