

Innlevering i FORK1120 - Matematikk forkurs OsloMet  
Obligatorisk innlevering 5  
Innleveringsfrist Torsdag 5. februar 2026  
Antall oppgaver: 11

Dere kan arbeide sammen, men lever individuelt. Ikke kopier. Dere kan spørre om hjelp i øvingstimene.

**Oppgave 1.** Finn volum og overflateareal til følgende figurer. Tegn gjerne figurene.

- a) En rett sylinder med radius 5 og høyde 10. (Bunnplaten tas med når dere finner overflatearealet, men ikke topplaten).

LF: Volumet er grunnflaten ganget med høyden

$$\pi r^2 h = \pi 5^2 \cdot 10 = \underline{250\pi} \simeq 785.398$$

Overflatearealet er lik

$$\pi r^2 + 2\pi r h = \pi 5^2 + 2\pi 5 \cdot 10 = \pi(25 + 100) = \underline{125\pi} \simeq 392.699$$

- b) En kjele med radius 5 og høyde 12. (Bunnplaten tas med.)

LF: Volumet er lik

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi 5^2 \cdot 12/3 = \underline{100\pi} \simeq 314.159$$

Overflatearealet er lik

$$\pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi 5^2 + \pi 5 \cdot \sqrt{5^2 + 12^2} = 5\pi(5 + \sqrt{169}) = \underline{90\pi} \simeq 282.743$$

- c) En halvkule (hvor snittflaten tas med) som har diameter 8.

LF: Radien til halvkulen er lik halve diameteren  $r = 4$ . Volumet er lik

$$V = \frac{1}{2} \frac{4\pi r^3}{3} \simeq \frac{1}{2} \frac{4\pi 4^3}{3} = \underline{128\pi/3} \simeq 134.041$$

Overflatearealet er lik

$$A = \pi r^2 + \frac{1}{2} 4\pi r^2 = 3\pi r^2 = 3\pi 4^2 = \underline{48\pi} \simeq 150.796$$

- d) Et triangulært rett prisme som beskrives som en likesidet trekant med sidelengder 4 og med en dybde i prismet som er lik 7.

LF: Volumet er lik produktet av dybden og arealet til trekanten. Arealet til den likeside trekanten er lik  $(1/2)4^2 \cdot \sin(60^\circ) = 4\sqrt{3}$ . Volumet er derfor lik

$$V = 4\sqrt{3} \cdot 7 = \underline{28\sqrt{3}} \simeq 48.4974$$

Overflatearealet er lik

$$A = (4 + 4 + 4) \cdot 7 + 2 \cdot 4\sqrt{3} = \underline{4(21 + 2\sqrt{3})} \simeq 97.856$$

- e) En kube hvor diameteren fra et hjørne til motsatte hjørne (lengst mulig unna) er lik  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

LF: La sidelengen i kuben være lik  $L$ . Vi benytter Pytagoras sin sats to ganger. Først ser vi at diagonalen i en av de seks sidene i kuben er lik  $\sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2}L$ . Deretter benytter vi Pytagoras sin sats på den rettvinkla trekanten med hypotenus en lang diagonal i kuben og kateter med lengde  $L$  og  $\sqrt{2}L$ . Vi finner at lengden til en av de lange diagonalene er lik  $\sqrt{L^2 + 2L^2} = \sqrt{3}L$ .

Vi kan nå finne lengden  $L$ : fordi  $2\sqrt{3} = \sqrt{3}L$ , så er  $L = 2$ . Volumet til kuben er derfor lik  $V = 2^3 = 8$ . Overflatearealet til kuben er lik  $A = 6 \cdot 2^2 = 24$ .

**Oppgave 2.** Finn vinklene og lengden til sidene, samt arealet til trekanten  $\triangle ABC$  gitt som følger. Svaret kan gis som desimaltall med minst 4 siffrers nøyaktighet. Tallene som er oppgitt er eksakte.

- a)  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$  og  $AB = 8$ .

LF: Dette er en rettvinkla trekant. Siden summen av vinklene i en trekant er  $180^\circ$  så er  $\angle B = 60^\circ$ . Hypotenusen  $BC$  har lengde

$$\underline{BC = 8 / \sin(30^\circ) = 8 / (1/2) = 16.00.}$$

Kateten  $AC$  har lengde  $\underline{AC = 8 / \tan(30^\circ) = 8 / (1/\sqrt{3}) = 8\sqrt{3} \approx 13.856}$ . Arealet til trekanten er  $AC \cdot AB / 2$  (siden  $\sin(\angle A) = 1$ ). Arealet er  $(8\sqrt{3}) \cdot 8 / 2 = 32\sqrt{3} \approx 55.425$ .

- b)  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle C = 33^\circ$  og  $AB = 8$ . Denne oppgaven er svært lik deloppgave a). Vinkel  $C$  er øka fra 30 til 33 grader. Vi forventer derfor at  $AC$  og  $BC$  er litt kortere her. Vinkel  $B$  er lik  $\angle B = 57^\circ$ . Hypotenusen  $BC$  har lengde  $\underline{BC = 8 / \sin(33^\circ) \approx 14.689}$ . Kateten  $AC$  har lengde  $\underline{AC = 8 / \tan(33^\circ) \approx 12.319}$ . Arealet til trekanten er  $\underline{AC \cdot AB / 2 = 12.319 \cdot 8 / 2 \approx 49.276}$ .

- c)  $\angle C = 20^\circ$  og  $AC = BC = 10$ .

LF: Dette er ein likebeina trekant med to sider av lengde 10 og vinkel  $20^\circ$  mellom de to like sidene. Vinkel  $A$  og  $B$  må da være like store. Siden summen av vinklene i en trekant er  $180^\circ$  er  $\angle A = \angle B = 80^\circ$ . Lengden på siden  $\underline{AB}$  er lik  $2AC \cos(80^\circ) = 20 \cos(80^\circ) \approx 3.473$ . Arealet til trekanten er lik  $\underline{AB \cdot AC \cdot \sin(80^\circ) / 2 \approx 17.10}$ .

- d)  $\angle A = 55^\circ$ ,  $\angle B = 44^\circ$  og  $AC = 23$ .

LF: Siden summen av vinklene i en trekant er  $180^\circ$  så er  $\angle C = (180 - 44 - 55)^\circ = 81^\circ$ . Her er det naturlig å anvende sinussetningen siden vi kjenner både vinkel  $B$  og lengden til side  $b = AC$ . Sinussetningen sier at følgende forhold er like

$$\frac{\sin \angle B}{b} = \frac{\sin \angle A}{a} = \frac{\sin \angle C}{c}.$$

Forholdet er lik  $\sin(44^\circ) / 23 = 0.0302025 \dots$

Lengden til siden  $\underline{AB}$  er  $\sin(81^\circ) / 0.0302025 \approx 32.70$  og

lengden til siden  $\underline{BC}$  er  $\sin(55^\circ) / 0.0302025 \approx 27.12$ .

Arealet til trekanten er lik  $\underline{AB \cdot AC \cdot \sin(55^\circ) / 2 \approx 308.1}$ .

e)  $\angle A = 40^\circ$ ,  $AC = 8$  og  $BC = 7$ .

LF: Det er to forskjellige trekanter med disse egenskapene. Vi bruker sinussetningen og får :

$$\frac{\sin \angle C}{c} = \frac{\sin \angle B}{b} = \frac{\sin \angle A}{a} = \frac{\sin(40^\circ)}{7} \approx 0.0918268 \dots$$

Det følger at  $\sin \angle B = AC \cdot 0.0918268 \dots = 0.734614 \dots$ . Dette gir to mulige løsninger for  $\angle B$ ,  $\angle B_1 = \arcsin(0.734614) = 47.27^\circ$  og  $\angle B_2 = 180^\circ - \angle B_1 = 132.7^\circ$ . Tilsvarende verdier for vinkel  $C$  er  $\angle C_1 = 92.73^\circ$  og  $\angle C_2 = 7.275^\circ$ . Lengden til siden  $AB$ , eller  $c$ , er lik  $\sin(\angle C)\sin(\angle A)/a$ . I de to tilfellene får vi  $AB_1 = 10.88$  og  $AB_2 = 1.37$ .

Arealet til trekanten er lik  $AC \cdot AB \cdot \sin(\angle C)/2$ . I tilfelle 1 er arealet til trekanten  $8 \cdot 7 \sin(92.725^\circ) \approx \underline{27.97}$  og i tilfelle 2 er arealet til trekanten  $8 \cdot 7 \sin(7.2746^\circ)/2 \approx \underline{3.545}$ .

f)  $\angle A = 120^\circ$ ,  $AB = 12$  og  $AC = 7$ .

Her er det naturlig å bruke cosinussetningen siden vi kjenner vinkelen mellom de to kjente sidene. Cosinussetningen gir at

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos(120^\circ) = 7^2 + 12^2 - 2 \cdot 7 \cdot 12(-1/2) = 49 + 144 + 84 = 277.$$

Siden  $a > 0$  så er  $BC = a = \sqrt{277} \approx 16.64$ . Fra sinussetningen er

$$\sin(\angle C) = AB \cdot \sin(\angle A)/BC = 12(\sqrt{3}/2)/16.6433 = 0.62441 \dots$$

Siden  $\angle A = 120^\circ$  så er summen av vinkel  $B$  og vinkel  $C$  lik  $70^\circ$ . Derfor er  $\angle C = 38.64^\circ$  og  $\angle B = 21.36^\circ$ . Arealet til trekanten er lik

$$7 \cdot 12 \cdot \sin(120^\circ)/2 = \underline{36.37}.$$

**Oppgave 3.** Vi har oppgitt følgende om en firkant  $ABCD$ : Lengden på side  $AB$  er lik 4, lengden på side  $AD$  er lik 5, vinkel  $BAD$  og  $ABC$  er begge lik  $100^\circ$ , og vinkel  $BCD$  er lik  $80^\circ$ . Finn lengden på sidene  $BC$  og  $CD$ .

LF: Vi kjenner tre av de fire vinklene i firkanten. Vinkel  $ADC$  er derfor lik  $(360 - 100 - 100 - 80)^\circ = 80^\circ$ . Firkanten er et trapes. Dette trapeset er symmetrisk ved refleksjon om aksene som er vinkelrett på linjen  $AB$  og som krysser midt på linjen  $AB$ . Derfor er lengden til  $AB$  er lik lengden til  $CD$ , så  $|BC| = 5$ . Lengden til  $CD$  er lik lengden til  $AB$  pluss to kopier av lengden  $|AD| \cos(80^\circ)$ . Vi får

$$|CD| = |AB| + 2 \cdot |AD| \cos(80^\circ) = 4 + 2 \cdot 5 \cdot \cos(80^\circ) \simeq \underline{5.73648}$$

Denne oppgaven fikk kanskje en overraskende enkel løsning. Hvis vi erstatter vinkel  $BCD$  med  $v$  istedenfor 80 grader kan vi løse problemet som følger (som skissert i en forelesning): Kosinussetningen gir at  $BD$  er lik

$$|AD| = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos(100^\circ)} \simeq 6.9243$$

Ved sinussetningen er vinkel  $ABD$  gitt ved

$$\arcsin\left(\frac{|AD| \sin(100^\circ)}{|BD|}\right) \simeq \arcsin(0.71112) \simeq 45.3264^\circ$$

(Vinkelen må være mindre enn 90 grader siden vinkel  $A$  er 100 grader.) Vi får da at vinkel  $DBC$  er lik

$$\angle DBC = (100 - 45.3264)^\circ = 54.6735^\circ$$

Vi kan nå benytte sinussetningen på trekanten  $BCD$ ,

$$|CD| = \frac{|AD| \sin(\angle DBC)}{\sin(v)}$$

$$|BC| = \frac{|AD| \sin(180^\circ - v - \angle DBC)}{\sin(v)}$$

Vi sjekker at vi får den forventede løsningen når  $v = 80^\circ$

$$|CD| = \frac{6.9243 \sin(54.6735)}{\sin(80^\circ)} = 5.73648$$

$$|BC| = \frac{6.9243 \sin(180^\circ - 80^\circ - 54.6735)}{\sin(80^\circ)} = 5$$

**Oppgave 4.** (Hvis du syntes oppgave 2 var vanskelig, kan du hoppe over denne oppgaven.) Bestem lengden på alle sidene og finn alle vinklene til alle trekantene spesifisert som følger:

- a) Trekantene er rettvinkla og to av sidene har lengde 4 og 5.

Tilfellet 1: Katetene har lengde 4 og 5. Da har hypotenus lengde  $\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \approx 6.403$ . Vinkelen som har kateten med lengde 5 som hosliggende katet er da lik  $\arctan(4/5) \approx 38.660^\circ$ . Den andre vinkelen, som har kateten med lengde 4 som hosliggende, er da lik  $90^\circ - 38.660^\circ = 51.340^\circ$ .

Tilfellet 2: Hypotenus er lengre enn katetene. En mulighet er at 5 er lengden på hypotenus og 4 er lengden på den ene kateten. Lengden på den andre kateten er da  $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$  (eksakt). Vinkelen som har kateten med lengde 4 som hosliggende er da lik  $\arccos(4/5) \approx 36.870^\circ$ . Den andre vinkelen, som har kateten med lengde 3 som hosliggende, er da lik  $90^\circ - 36.870^\circ = 53.130^\circ$ .

- b) Trekantene er likebeina og en av vinklene er 30 grader og en av sidene har lengde 10.

Tilfellet 1: Vinkelen mellom de to sidene som er like lange er 30 grader. Da er de to andre vinklene  $(180^\circ - 30^\circ)/2 = 75^\circ$ . Hvis de to sidene som er like lange har lengde 10 har den tredje siden lengden  $2 \cdot 10 \sin(15^\circ) \approx 5.176$ .

Tilfellet 2: Vinkelen som i tilfellet 1, men anta at det er siden som ikke er like lang som en annen side som har lengde 10. Da er lengden på de to sidene som er like lange lik  $(10/2)/\sin(15^\circ) \approx 19.316$ .

Tilfellet 3: La oss nå anta at vinkelen på 30 grader ikke er vinkelen mellom sidene som er like lange. Da er begge disse vinklene 30 grader, og vinkelen mellom de like lange sidene er  $120^\circ$ . Hvis de to like lange sidene har lengde 10, da er lengden på den tredje siden  $2 \cdot 10 \cdot \sin(60^\circ) = 10\sqrt{3} \approx 17.320$ .

Tilfellet 4: La vinklene være som i tilfellet 3. En annen mulighet er at de to like sidene har lengde  $10/\sqrt{3} \approx 5.774$  og at den tredje siden har lengde 10.

- c) Den ene vinkelen er 30 grader og to av sidene har lengde 8 og 5.

La side  $a$  ha lengde 8 og side  $b$  ha lengde 5. Vi undersøker hvilke trekanter vi kan ha når vi setter hver av de tre vinklene i trekanten lik vinkelen  $30^\circ$ .

Tilfellet 1: Vinkel  $C$  er 30 grader. Ved cosinussetningen er da  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(30^\circ) = 89 - 40\sqrt{3} = 19.717$ . Derfor er lengden på den tredje siden  $c = 4.440$ . Ved sinussetningen er  $\sin(\angle A) = 8 \sin(30^\circ)/c = 0.9008$ . Derfor er  $\angle A$  er lik  $64.26^\circ$  eller  $(180 - 64.26)^\circ = 115.74^\circ$ . Sinussetningen gir også at  $\sin(\angle B) = 5 \sin(30^\circ)/c = 0.5630$ . Dette gir at  $\angle B$  er lik  $34.26^\circ$  eller  $145.74^\circ$ . Vi ser at de eneste kombinasjoner av vinklene som har sum  $180^\circ$  er  $\angle A = 115.74^\circ$ ,  $\angle B = 34.26^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$ .

Tilfellet 2: Vinkel  $B$  er 30 grader. Ved sinussetningen så er  $\sin(\angle A) = a \sin(\angle B)/b = 4/5$ . Derfor er  $\angle A$  lik  $53.13^\circ$  eller  $126.87^\circ$ . Når  $\angle A = 53.13^\circ$  er da  $\angle C = 96.87^\circ$ . Ved sinussetningen er da lengden på den siste siden er da lik  $c = \sin(\angle C)b/\sin(\angle B) = 9.93(9.928)$ .

Tilfellet 3: Vinkel  $B$  er 30 grader, men vi ser på den andre muligheten for vinkel  $A$  fra Tilfellet 2. Da er  $\angle A = 126.87^\circ$ . Og derfor er  $\angle C = 23.13^\circ$ . Ved sinussetningen er da  $c = \sin(\angle C)b/\sin(\angle B) = 3.928$ .

Tilfellet 4: Vinkel  $A$  er lik 30 grader. Ved sinussetningen er  $\sin(\angle B) = b \sin(\angle A)/a = 5/16 = 0.3125$ . Dette gir at  $\angle B$  er lik  $18.21$  eller  $161.79$  grader. Vinkelen  $\angle B = 161.79^\circ$  er ikke mulig siden summen av vinklene  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{circ}$ . Hvis  $\angle B = 18.21^\circ$ , da er  $\angle C = 131.79^\circ$ . Lengden på den siste siden er  $c = a \sin(\angle C)/\sin(\angle A) = 11.93$ .

- d) Trekanten har sider av lengde 2, 3 og 4. Vi gir navn til hjørnene i trekanten slik at side  $a$  har lengde 2, side  $b$  har lengde 3 og side  $c$  har lengde 4. Fra cosinussetningen har vi at  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle C)$ . Dette gir at  $\cos(\angle C) = -1/4$ . Derfor er  $\angle C = \arccos(-1/4) = 104.48^\circ$ . Ved sinussetningen så er  $\sin(\angle B) = b \sin(\angle C)/c = 0.72618$ . Siden summen av vinklene skal være  $180^\circ$  så er bare  $\angle B = 46.57$  en mulig løsning. Vinkel  $A$  må da være  $\angle A = 28.96^\circ$ .

**Oppgave 5.** Hva er forholdet mellom høyden og radien til kjeglen som får plass inni en kule med radius lik 1 og har størst mulig volum?

LF: En kjegle som har størst mulig volum må berøre kulen både i toppen og langs hele sirkelen i bunnen av kjeglen. Vi kan plassere kjeglene slik at den er i posisjon  $(0, 0, 1)$  på enhetskulen i rommet med senter i origo. Lar vi sirkelen i bunn bevege seg nedover kulen ser vi at volumet øker helt til vi kommer ned til  $xy$ -planet, fordi både høyden og radien i kjeglen øker da. Nå vi går under  $xy$ -planet vil radien avta og høyden fremdeles øke. Ved bunnen av kulen er radien i kjeglen blitt lik 0, så volumet er lik 0. Vi ønsker å finne  $z$ -koordinaten hvor vi får størst volum. Vi uttrykker volumet til den innskrevne kjeglen som en funksjon i distansen  $d$  under  $xy$ -planet hvor kjeglebunnen møter kulen. Da er høyden til kjeglen lik  $1 + d$  og kvadratet til radien til kjeglen, ved Pytagoras' sats, er lik  $1 - d^2$ . Volumet er derfor gitt ved uttrykket

$$V(d) = \frac{\pi(1+d)(1-d^2)}{3} = \frac{\pi(1+d-d^2-d^3)}{3}$$

Den deriverte til volum-funksjonen satt lik 0 gir likningen

$$1 - 2d - 3d^2 = 0$$

Røttene er lik

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-6} = \frac{-1 \pm 2}{3}$$

Det er  $-1$  og  $1/3$ . I endepunktene  $d = \pm 1$ , er volumet lik 0. Den største verdien får vi derfor når  $d = 1/3$ . I dette tilfellet er høyden til kjeglen lik  $1 + 1/3 = 4/3$  og radien til kjeglen er lik  $\sqrt{1 - (1/3)^2} = 2\sqrt{2}/3$ . Forholdet mellom høyden og radien til den største kjeglen er derfor lik  $(4/3)/(2\sqrt{2}/3) = \underline{\sqrt{2}}$ .

**Oppgave 6.** **Trappeformelen** sier at summen av 2 ganger opptrinnet pluss inntrinnet skal være 62 cm (eller ikke avvike med mer en 2 cm fra dette.)

$$2O + I = 62 \text{ cm}$$

Hva må opptrinn og inntrinn være for en trapp som skal ha en stigning på 30 grader? Finn gjerne, mer generelt, en formel for opptrinnet og inntrinnet når trappen har en stigning på  $v$  grader.

LF: Hvis stigningen er lik  $v$ , så er forholdet  $O/I = \tan(v)$ . Vi har derfor at  $O = I \tan(v)$ . Trappeformelen gir derfor likningen

$$2O + I = (2 \tan(v) + 1)I = 62 \text{ cm}$$

Dette gir oss formlene

$$I = \frac{62 \text{ cm}}{1 + 2 \tan(v)} \quad \text{og} \quad O = \frac{62 \tan(v) \text{ cm}}{1 + 2 \tan(v)}$$

Når  $v = 30^\circ$ , så er  $\tan(v) = 1/\sqrt{3}$ . I dette tilfellet blir derfor inntrinnet og opptrinnet lik

$$I = \frac{62 \text{ cm}}{1 + 2/\sqrt{3}} = \frac{62\sqrt{3} \text{ cm}}{\sqrt{3} + 2} \simeq 28.77 \text{ cm} \quad \text{og} \quad O = \frac{62 \text{ cm}}{\sqrt{3} + 2} \simeq 16.61 \text{ cm}$$

**Oppgave 7.** Finn alle vinkler  $v$ , med enhet radianer, i intervallet  $[0, 2\pi]$  slik at hver av likningene er oppfylt. Svarene skal gis eksakt.

a)  $\sin(v) = -\frac{1}{2}$

LF: Løsningene er  $\underline{v = \frac{7\pi}{6} \text{ eller } v = \frac{11\pi}{6}}$ .

b)  $\cos(v) = 1$

LF: Løsningene er  $\underline{v = 0 \text{ eller } v = 2\pi}$ .

c)  $\cos(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

LF: Løsningene er  $\underline{v = \frac{5\pi}{6} \text{ eller } v = \frac{7\pi}{6}}$ .

d)  $\sin(v) - \sqrt{3} \cos(v) = 0$

LF: Det er ingen løsning når  $\cos v = 0$  (siden da er  $\sin v = \pm 1$ ). Likningen er derfor ekvivalent til likningen  $\tan(v) = \sqrt{3}$ . Løsningene er  $\underline{v = \frac{\pi}{3} \text{ og } v = \frac{4\pi}{3}}$ .

e)  $\sin(v) \cos(v) = 0$

LF: Likningen er ekvivalent til  $\sin(v) = 0$  eller  $\cos(v) = 0$ . Løsningsmengden er

$$\underline{\left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}}$$

**Oppgave 8.** Finn alle vinkler  $v$ , med enhet grader, i intervallet  $[0, 360^\circ]$  slik at hver av likningene er oppfylt. Svarene skal gis med fem gyldige siffer.

a)  $\sin(v) = \frac{1}{3}$

LF: Løsningene er  $v = 19.471^\circ$  eller  $v = 160.53^\circ$ .

b)  $\cos(v) = 0.8$

LF: Løsningene er  $v = 36.870^\circ$  eller  $v = 323.13^\circ$ .

c)  $\tan(v) = 1000$

LF: Løsningene er  $v = 89.943$  eller  $v = 269.94^\circ$ .

**Oppgave 9.** Finn alle vinkler  $v$ , med enhet grader, i intervallet  $[0, 360^\circ]$  slik at hver av likningene er oppfylt. Svarene skal gis eksakt.

a)  $\sin^2(v) = \frac{1}{2}$

LF: Likningen er ekvivalent til  $\sin(v) = 1/\sqrt{2}$  eller  $\sin(v) = -1/\sqrt{2}$ . I intervallen er løsningene gitt ved  $v = 45, 135, 225$  og  $315$  grader.

b)  $2 \sin(v) + 5 = 9 - \sin(v)$

LF: Dette er en lineær likning i  $\sin(v)$ . Vi løser likningen og får  $\sin(v) = 4/3$ . Denne likningen har ingen løsning siden  $\sin(v) \leq 1$  for alle  $v$ .

c)  $\cos^2(v) - \cos(v) = 0$  Vi faktorerer uttrykket og får  $\cos(v)(\cos(v) - 1) = 0$ . Et produkt er lik null hvis og bare hvis minst en av faktorene er null. Derfor er løsningen alle  $v$  slik at  $\cos(v) = 0$  eller  $\cos(v) = 1$ . Løsningen er derfor  $v = 0, 90, 270$  og  $360$  grader.

d)  $\sin^2(v) + \cos(v) - 1 = 0$

LF: Siden  $\sin^2(v) = 1 - \cos^2(v)$  for alle  $v$  så er likningen ekvivalent til  $-\cos^2(v) + \cos(v) = 0$ . Dette er igjen ekvivalent til likningen i deloppgave c), og derfor er løsningsmengden som i c).

e)  $2 \sin(v) - \tan(v) = 0$

LF: Her må vinkelen  $v$  være slik  $\cos(v) \neq 0$  siden  $\tan(v)$  er bare definert da. Vi faktorerer uttrykket og får  $\sin(v)(2 - 1/\cos(v)) = 0$ . Produktet er null hvis og bare hvis  $\sin(v) = 0$  eller  $\cos(v) = 1/2$ . Løsningen er derfor

$v = 0, 60, 180, 300$  og  $360$  grader.

**Oppgave 10.** Løs følgende likninger. Gi svarene med 4 gyldige siffer.

a)  $\arcsin x = 0.3786$ . Likningen sier bare at  $0.3786$  er vinkelen mellom  $-\pi$  og  $\pi$  slik at sinus til denne vinkelen er lik  $x$ . Løsningen er  $x = \sin(0.3786) = \underline{0.3696}$ .

b)  $\tan(2\pi x) = 1$  hvor  $x \in [-2, 2]$ .

La vinkelen være  $v = 2\pi x$ . Variabelen  $x$  er lik  $v/(2\pi)$ . Da er  $v$  mellom  $-4\pi$  og  $4\pi$ . Løsningene til  $\tan(v) = 1$  er  $v = \pi/4 + n\pi$  for heltall  $n$ . I det gitte intervallet kan  $n$  være mellom  $-4$  og  $3$ . Løsningsmengden er derfor

$$\underline{\{1/8 - 2, 1/8 - 3/2, 1/8 - 1, 1/8 - 1/2, 1/8, 1/8 + 1/2, 1/8 + 1, 1/8 + 3/2\}}.$$

Som desimaltall er dette nøyaktig lik

$$\{-1.875, -1.375, -0.875, -0.375, 0.125, 0.625, 1.125, 1.625\}$$

c)  $\cos(2x - 1) = 0.3479$  hvor  $x \in [0, 3]$ .

Vinkelen er  $v = 2x - 1$ . Da er variabelen  $x = (v + 1)/2$ . I hvert omløp er løsninger gitt ved  $\arccos(0.3479) = 1.21547$  og  $2\pi - \arccos(0.3479) = 5.06771$ . Dette gir bare en løsning for  $x$ :  $x = 1.1077$ .

**Oppgave 11.** Finn alle løsningene, i første omløp  $[0, 2\pi)$ , til ulikhetene. Svaret skal gis eksakt.

a)  $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) > 0$ .

Likningen  $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 0$  er ekvivalent til  $\tan(x) = -1/\sqrt{3}$ , forutsatt at  $\cos(x) \neq 0$ . Løsningene er  $x = 5\pi/6$  og  $x = 11\pi/6$ . Funksjonen  $f(x) = \sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)$  er kontinuerlig. Den endrer derfor bare fortegn når den passerer et nullpunkt. Vi kan nå sjekke fortegnet i hver intervall  $[0, 5\pi/6)$ ,  $\langle 5\pi/6, 11\pi/6 \rangle$  og  $\langle 11\pi/6, 2\pi \rangle$ . (For eksempel er  $f(0) = f(2\pi) = 1 > 0$ ,  $f(\pi) = -1 < 0$ .) Vi finner at likningen  $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) > 0$  har løsningen

$$\underline{[0, 5\pi/6) \cup \langle 11\pi/6, 2\pi \rangle}.$$

b)  $\cos^2(x) + 2\cos(x) + 3/4 \geq 0$ .

Uttrykket er et kvadratisk polynom med variabel  $u$  lik  $\cos(x)$ . Det kvadratiske uttrykket

$$u^2 + 2u + 3/4 = (u + 3/2)(u + 1/2) = 0$$

er større enn eller lik 0 når  $u \geq -1/2$  eller  $u \leq -3/2$ . Ulikheten er derfor ekvivalent til den enklere ulikheten  $\cos(x) \geq -1/2$  (den andre ulikheten  $\cos(x) \leq -3/2$  har ingen løsning). Løsningen er

$$\underline{[0, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 2\pi \rangle}.$$

c)  $\cos^2(x) - \sin(x) < -1$ .

Ved å bruke Pytagoras setning er denne ulikheten ekvivalent til  $-\sin^2(x) - \sin(x) < -2$  som også ekvivalent til  $\sin^2(x) + \sin(x) - 2 > 0$ . Siden  $\sin(x)$  og  $\sin^2(x)$  aldrig er større enn 1 er det ingen løsninger til ulikheten.

d)  $\cos(x - 1) < 2\cos^2(x - 1)$ .

La vinkelen være  $v = x - 1$ . Ulikheten er ekvivalent til  $2\cos^2(v) - \cos(v) > 0$ . Vi faktoriserer uttrykket som et polynom i  $u = \cos(v)$  og får  $2u^2 - u = u(2u - 1)$ . Dette uttrykket er positivt (fortegnsskjema) når  $\cos(v)$  og  $\cos(v) - 1/2$  har samme fortegn. Dette gir følgende løsningsmengde for  $v = x - 1$

$$[0, \pi/3) \cup \langle \pi/2, 3\pi/2 \rangle \cup \langle 5\pi/3, 2\pi \rangle$$

for  $v$  i første omløp. Løsningsmengden for  $x$  er derfor

$$\underline{[0, \pi/3 + 1) \cup \langle \pi/2 + 1, 3\pi/2 + 1 \rangle \cup \langle 5\pi/3 + 1, 2\pi \rangle}$$

e)  $\sin(x) < \sin(2x)$ .

Vi kan benytte addisjonsformelen for sinus  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ . Ulikheten blir da ekvivalent til  $2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) = \sin(x)(2\cos(x) - 1) > 0$ . Løsningen består av alle  $x$  slik at  $\sin(x)$  og  $2\cos(x) - 1$  har samme fortegn. Løsningsmengden er

$$\underline{\langle 0, \pi/3 \rangle \cup \langle \pi, 5\pi/3 \rangle}.$$

f)  $2 \cos(2x) + 8 \cos(x) + 5 \geq 0$

Addisjonsformlene for cosinus samt Pytagors sin sats gir at  $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$ . Derfor er uttrykket i ulikheten ekvivalent til  $4 \cos^2(x) + 8 \cos(x) + 3$ . Dette kvadratiske uttrykket i  $\cos(x)$  faktoriserer som  $(2 \cos(x) + 1)(2 \cos(x) + 3)$ . Den andre faktoren er alltid større eller lik 1 så uttrykket er ikke-negativt når  $\cos(x) + 1/2$  er ikke-negativt. Løsningsmengden er derfor

$$\underline{[0, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 2\pi]}.$$