Innlevering i	FORK1120 - Matematikk forkurs OsloMet
	Obligatorisk innlevering 3
Innleveringsfrist	Tirsdag 18. november 2025 kl 12:15
Antall oppgaver:	10. De ni siste oppgavene skal ikke leveres.

Alle svar skal begrunnes. Funksjonene har den naturlige definisjonsmengden hvis ikke annet er oppgitt. Benytt gjerne Geogebra eller lignende program, men regn mest mulig for hånd. For eksempel regn ut de deriverte selv, ikke benytt et regneprogram til å finne dem. (Men sammenlign gjerne dine utregninger med det du får ved å benytte Geogebra.)

Oppgave 1. Løs følgende likninger og ulikheter ved regning, og oppgi svarene eksakt.

1. $10^x = 5$
2. $\log|x + 2| = 1$
3. $3 \cdot 2^x = 10^x$
4. $32^x \geq 5 \cdot 10^x$
5. $\log|\ln|x|| < 1$
6. $e^{2x} + e^x - 6 = 0$
7. $\log(x) + \log(x + 2) = 2$

Oppgave 2. Vis at for positive a så er

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

og vi har likhet bare når $a = 1$. Vis gjerne dette uten bruk av derivasjon. Resultatet kan tolkes som at omkretsen til et rektangel med areal lik 1 er minst når rektangelet er et kvadrat: Hvis den ene siden har lengde a, da må den andre siden ha lengde $1/a$ siden arealet er lik 1. Omkretsen til rektangelet er lik $2(a + 1/a)$.

Oppgave 3. Deriver de følgende funksjonene.

$$a(x) = 4x^9 \qquad b(x) = -x^5 + 2x^4 + 5x^2 - 13 \qquad c(x) = \frac{4x^6}{3} + \frac{x^7}{2x^3} + \frac{2-3x}{5} + \frac{3}{4} \qquad x \neq 0$$

$$d(x) = 7(8 - 3x)^5 \qquad e(x) = \frac{1}{5+x} + \sqrt{5+x} + \sqrt{4+8x} \qquad f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x - 2}$$

Oppgave 4. Finn tangent- og normallinjene til funksjonenene

$$j(x) = x^4 + 2x \qquad \text{i} \qquad (-2, 12)$$

$$k(x) = \sqrt{3 + 11x} \qquad \text{i} \qquad (2, 5)$$

Oppgave 5. Bestem de to positive reelle tallene a og b slik at $a + b = 10$ og summen

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$$

blir minst mulig.

Oppgave 6. For hver av de seks funksjonene nedenfor:

1. Beskriv den naturlige definisjonsmengden D_f til funksjonen
2. Finn diskontinuitetene
3. Finn verdiene i D_f hvor funksjonen ikke er deriverbar, og finn den deriverte til funksjonen (hvor den eksisterer).

$$l(x) = \sqrt{9-x}$$

$$m(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

$$n(x) = |x| - |x-2|$$

$$o(x) = |x^2 - 9|$$

$$p(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \leq 1 \\ 3x-1 & 1 < x \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} 1 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ -x^2+4x-2 & x \geq 1 \end{cases}$$

Oppgave 7. Bestem a og b slik at funksjonen

$$r(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & x < -1 \\ x^2 + b & x \geq -1 \end{cases}$$

blir deriverbar for alle x.

Oppgave 8. Gitt funksjonen

$$s(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 14$$

Finn alle verdiene x slik at tangentlinjen i punktet $(x, s(x))$ til grafen til $s(x)$, er parallell til linjen $y = -24x - 13$.

Oppgave 9. For de fem funksjonene nedenfor finn: Asymptotene, topp- og bunnpunkt, samt monotoniegenskapene. Lag gjerne en enkel skisse av grafen til funksjonene.

$$t(x) = 3x + \frac{1}{x} \qquad u(x) = \frac{4x+3}{x+1} \qquad v(x) = \frac{x+2}{x^2-2} \qquad w(x) = \frac{4}{3}$$

$$y(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$$

Oppgave 10. Deriver funksjonene

$$a(x) = x^e + e^x \qquad b(x) = 2^x 5^{x+1} \qquad c(x) = \frac{3}{e^{2x}}$$

$$d(x) = \frac{x^2}{(2^x)^3} \qquad e(x) = \frac{e^{2x^3}}{3x+2} + 2e^3 \qquad f(x) = \log\left|\frac{2}{3x+1}\right|$$

$$g(x) = x^2 3^{1/x} \qquad h(x) = \log\sqrt{1+x^2} \qquad i(x) = (e^x)^4 \log|3-x|$$

Oppgave 11. Løs følgende likninger og ulikheter.

1. $1000^x = 100^x + 10^x$
2. $(\ln(x))^2 \geq \ln(x) + 6$
3. $\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1} + 2\right) = 1$
4. $\quad\sqrt{4-x} = \sqrt{4} - \sqrt{x}$
5. $10 - x < x^2 + 2x \leq 3x^2 - 12$

Oppgave 12. Deriver funksjonene

1. $\dfrac{\sqrt[3]{8x}}{\sqrt{9x}}$
2. $\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$
3. $x^2\sqrt{x^4+4}$
4. $x^3(2x+3)^4(3x+4)^5$
5. $(3 + (x^3-4)^5)^7$

Oppgave 13. For følgende funksjoner, definert for alle reelle tall, finn nullpunkt, ekstremalpunkt og vendepunkt. Avgjør hvor funksjonene vokser og avtar, og hvor de er konkave opp og konkave ned. Lag en skisse av grafene basert på det du har funnet.

$$x(t) = t^3 - 3t^2 + 2$$

$$y(x) = \begin{cases} -1/x & x \leq -1 \\ 3x & -1 < x < 0 \\ x^2 - 2 & 0 \leq x \end{cases}$$

$$z(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 & x \leq -1 \\ x^2 - 2 & -1 < x < 0 \\ x^3 - 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ (2x^2-3)/(x-2) & x > 1 \end{cases}$$

Oppgave 14. Finn alle topp og bunnpunkt til funksjonen

$$p(x) = (2x+1)^3(3-x)^4$$

(Bestem i den forbindelse gjerne monotoniegenskapene. Det vil si hvor funksjonene stiger og synker.)

Oppgave 15. Finn de globale topp- og bunnpunkt(ene) til følgende kontinuerlige funksjon definert på den lukka begrensa intervallen $[-3, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+3)^2 & -3 \leq x \leq -2 \\ 2 - \sqrt{3x+6} & -2 \leq x \leq 1 \\ x^3 - 2x^2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Oppgave 16. For de fire funksjonene nedenfor: a) Bestem monotoniegenskapene og finn ekstremalpunktene b) Bestem konkavitet og finn vendepunkt c) Finn asymptotene d) Lag en skisse av grafen

$$s(x) = x^3 - 3x + 1 \qquad t(x) = \frac{x^2+3}{x+3} \qquad u(x) = e^{-x^2} \qquad v(x) = \frac{(\log x)^2}{x}$$

Oppgave 17. I denne oppgaven skal dere finne alle polynomer med

$$\text{toppunkt i } (1,2) \quad \text{og} \quad \text{nullpunkt i } (-1,0)$$

1. med grad lik 2
2. med grad lik 3
3. med grad lik 4

Oppgave 18. La $r(t)$ være mengden av et radioaktivt stoff ved tiden t. Mengden som brytes ned er *proporsjonalt* med mengden av det radioaktives stoffet. Derfor oppfyller mengden $r(t)$ likningen

$$r'(t) = -kr(t)$$

for en positiv konstant k.

a) Vis at likningen ovenfor er oppfylt for $r(t) = r_0 e^{-kt}$. Her er $r_0 = r(0)$.
b) *Halveringstiden* er tiden det tar for et radioaktivt stoff å brytes ned slik at halvparten av den opprinnelig mengde av det radioaktive stoffet er igjen. Den skrives gjerne som $t_{1/2}$. Vis at konstanten k og halveringstiden er relatert ved identiteten

$$k \cdot t_{1/2} = \ln(2)$$

En metode for datering av gammelt organisk materiale er C-14 metoden. Den baserer seg på at levende organisk materiale får sitt karbon fra luften. (Plantene tar opp karbondioksyd fra luften, dyrene spiser planter og hverandre etc.) Andelen av isotopen ${}^{14}_{6}C$ i luften, og da levende organisk materiale, er omlag 10^{-12} i forhold til total mengde karbon. Etter at organismen dør blir det ikkje tilført mer karbon. Andelen ${}^{14}_{6}C$ avtar etter hvert som den brytes ned. Isotopen brytes ned til nitrogen og beta stråling. (Isotopen ${}^{14}_{7}N$ og ett elektron.) Halveringstiden til ${}^{14}_{6}C$ er omtrent 5700 år.

c) En hodeskalle har et forhold mellom C-14 og C (alle karbonisotopene) som er 0.7 av andelen til levende organismer. Hvor lenge er det siden personen døde?
d) Hva kan vi forvente at forhold mellom C-14 og C er for levninger av mennesker som døde rundt år 0?

Oppgave 19. Et gjerde skal settes opp inntil en vegg slik at området det avgrenser består av et rektangel med halvsirkler i hver ende. Hvis arealet skal være $A = 10m^2$, hva må da bredden a på den rektangulære delen, og diameter b på de sirkulære delene, være for at gjerdet skal være kortest mulig? Hva er omkretsen da? Oppgi gjerne lengdene a og b uttrykt ved hjelp av arealet A.