EKSAMENSSAMARBEIDENDE FORKURSINSTITUSJONER
Forkurs for 3-årig ingeniørutdanning og integrert masterstudium i teknologiske fag og tilhørende halvårig realfagskurs.
Universitetet i Sørøst-Norge, OsloMet, Høgskulen på Vestlandet, Høgskolen i Østfold, NTNU, Universitetet i Agder, Universitetet i Stavanger, UiT-Norges arktiske universitet, NKI, Metis.

Eksamensoppgave

MATEMATIKK

Bokmål

5. august 2024
kl. 9.00-14.00

Hjelpemidler:

Godkjente formelsamlinger i matematikk og fysikk
Godkjent enkel kalkulator

Andre opplysninger:

Oppgavesettet består av 5 sider medregnet forsiden, og inneholder 9 oppgaver.

Ved vurdering teller alle deloppgaver likt.
Besvarelsen må være så fullstendig at resonnementet kommer klart fram.

Oppgave 1

a) Skriv så enkelt som mulig:

$$\left(\frac{x^3}{27}\right)^{-2/3}$$

b) Trekk sammen:

$$\ln(xy) + \ln(x^2y) - \ln(xy^2)$$

Oppgave 2

Bestem likningenes definisjonsområder og løs likningene.

a)

$$\frac{x}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{3x}{x^2 - 3x}$$

b)

$$-3 + \sqrt{3 - x} = x$$

c)

$$\ln(2x^2 + x) = 0$$

Oppgave 3

Gitt funksjonen

$$f(x) = \ln(3 - x)$$

a) Finn likningen for tangenten til f gjennom punktet $(1, f(1))$.

b) Har $f(x)$ noen asymptoter? Begrunn svaret ditt.

Oppgave 6

Bente har brukt Python for å regne på en geometrisk rekke.

```
a1 = 1
k = 1.2
s = 0
for n in range(1,31):
    s = s + a1*k**(n-1)
print(s)
```

$1, 2, \dots, 30$

$\sum_{n=1}^{30} a_1 \cdot k^{n-1}$

a) Forklar hva som skjer i denne for-løkka, og oppgi hvor mange ganger den kjører.

b) Hva blir verdien av s, som skrives ut når programmet kjøres? Oppgi svaret med én desimal.

$a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$

Oppgave 7

Regn ut integralene.

a)

$$\int 2x \cdot e^{2x} dx$$

$u = 2x \qquad u' = 2$

$du = 2dx$

delvis int

$$\int \frac{u}{2} e^u du = \frac{u}{2} e^u - \int \frac{1}{2} e^u du$$

$$= xe^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

b)

$$\int_0^1 2x \cdot e^{x^2} dx$$

$u = x^2$

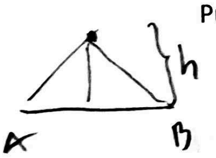
$$u' e^u dx = \int_{u(0)}^{u(1)} e^u du = \int_0^1 e^u du$$

$$= e^u \Big|_0^1 = e^1 - e^0$$

$$= \underline{e - 1}$$

Oppgave 8

Punktene $A(1,2,-1)$, $B(2,2,3)$ og $C(1,4,-3)$ er gitt.



a) Finn høyden i trekanten med AB som grunnlinje og C som toppunkt.

b) Vis at $4x - y - z - 3 = 0$ er en likning for planet gjennom A, B og C.

c) En linje går gjennom origo og $P(1,1,3)$. Vis at linja er parallell med planet gjennom A, B og C.

d) Finn volumet av den trekantede pyramiden som har hjørner i A, B, C og $T(-3,0,0)$.

Oppgave 4

Gitt funksjonen

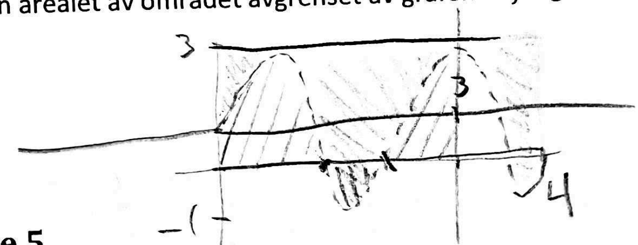
$$f(x) = 1 + 2\sin(\pi x), \qquad x \in [0,4]$$

a) Finn nullpunktene til f.

b) Finn funksjonens periode, amplitude og likevektslinje.

c) Vis ved regning at linja $y = 3$ tangerer $f(x)$ to steder: for $x = \frac{1}{2}$ og $x = \frac{5}{2}$.

d) Finn arealet av området avgrenset av grafen til f og linja $y = 3$.



$$\int_0^4 3-(1+2\sin(\pi x))\,dx$$

$$=2\int_0^4 1+\sin(\pi x)\,dx$$

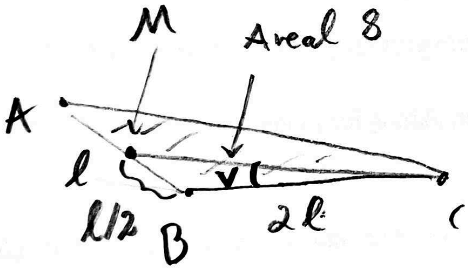
$$=2\cdot 4+0=\underline{\underline{8}}$$

Oppgave 5

I en trekant ABC er BC = 2AB og vinkel B er 150°. Arealet av trekanten er lik 8.

a) Finn lengdene av sidene i trekanten.

b) Vi kaller midtpunktet på siden AB for M. Finn vinkel BMC.



arealsetning

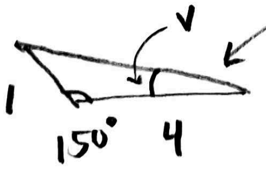
$$A = l\cdot 2l\cdot \underbrace{\sin(150^\circ)}_{1/2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$8 = l^2/2$$

$$\underline{l = 4} \qquad (l>0)$$

AC cosinussetningen...

b) $\angle BMC$



cos set gir k

sinussetn

$$\frac{\sin v}{1} = \frac{\sin(150^\circ)}{k} \qquad v<90^\circ$$

Oppgave 9

Gitt funksjonen

$$g(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{x - 3}$$

.

a) Finn definisjonsmengde for $g(x)$, og finn eventuelle nullpunkt.

b) Finn eventuelle asymptoter for $g(x)$.

c) Finn eventuelle topp/bunnpunkt for $g(x)$.

d) Finn eventuelle vendepunkt for $g(x)$.

e) Finn arealet avgrenset av grafen til g, x-aksen, linja $x = 4$ og linja $x = 7$.

Løs likningen $\sqrt{x+1} + 2 = x$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-2$$

$$\Rightarrow x+1 = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

abc-formel : røttene er $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-4\cdot 3}}{2\cdot 1}$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2} > \dfrac{5+3}{2} = 4$ ✓

$x = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2} < \dfrac{5-3}{2} = 1$ så $x-2 < -1$, men roten er ikke-negativ. Falsk løsning.

Løsningen er $\underline{x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}}$

Finn tangentlinjene til $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 1$
som har stigningstall lik 1.

Tangentlinjen har stigningstall lik 1 $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 1$

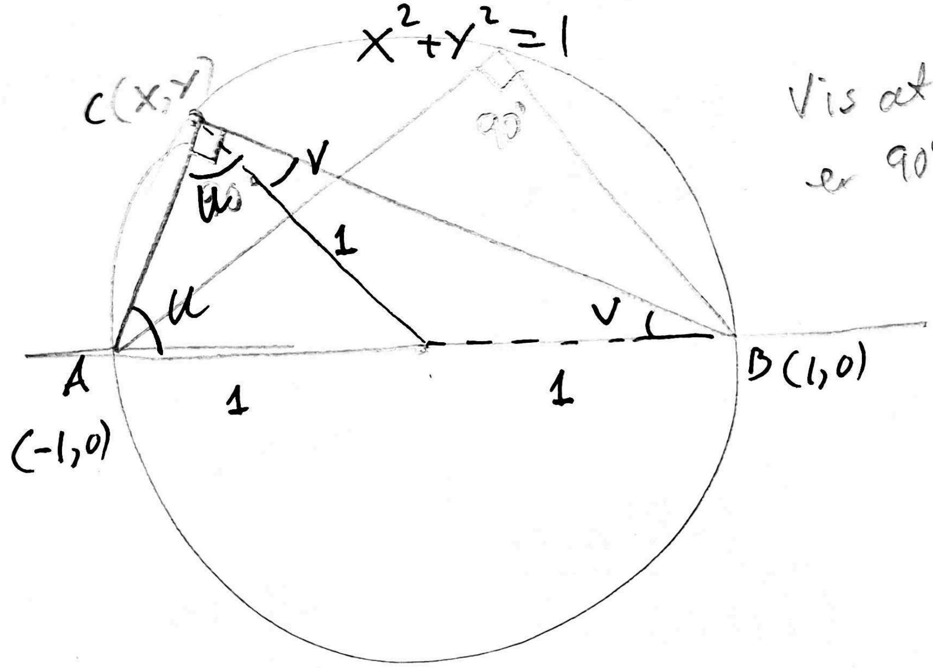
$$f'(x) = x^2 - 2x - 2 = 1$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x-3)(x+1) = 0$$

$x = -1$: Tangentlinje

$$y - f(-1) = 1(x - (-1))$$
$$y = x + 1 + \left(\tfrac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 2(-1) + 1\right)$$
$$= x + 1 + \tfrac{-1}{3} - 1 + 2 + 1$$
$$\underline{y = x + 2 + \tfrac{2}{3} = x + \tfrac{8}{3}}$$

$x = 3$

$$y - f(3) = 1(x-3)$$
$$y = x - 3 + \underbrace{\tfrac{1}{3}(3^3) - 3^2}_{0} - 2\cdot 3 + 1$$
$$\underline{y = x - 8}$$



Vis at vinkelen er 90° for alle punkt på sirkelen.

summen av vinklene i ΔABC

er $u + v + (u+v) = 2(u+v)$
$= 180°$

så $u+v = \frac{180°}{2} = \underline{\underline{90°}}$

Med bruk av vektorregning.

Viser at $\vec{AC} \perp \vec{BC}$:

$\vec{AC} = [x+1, y]$ $\quad$ $\vec{BC} = [x-1, y]$.

$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = (x+1)(x-1) + y \cdot y = x^2+y^2-1 = 0$ for alle punkt på sirkelen.

oppgaver

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$ (type $\frac{0}{0}$)

b) $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{k}{\sqrt{1+k}-1}$ (type $\frac{0}{0}$)

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(3h)}{2h\cos(h)}$ (type $\frac{0}{0}$)

a) $(x-4)$ er en faktor i både teller og nevner.

$$x^2-5x+4 = (x-4)(x-1)$$

$$x^2-16 = x^2-4^2 = (x-4)(x+4)$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-1}{x+4} = \underline{\frac{3}{8}}$$

b)

$$\lim_{k\to 0} \frac{k}{\sqrt{1+k}-1} = \lim_{k\to 0} \frac{k\,(\sqrt{1+k}+1)}{(\sqrt{1+k}-1)(\sqrt{1+k}+1)}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k\,(\sqrt{1+k}+1)}{(1+k-1)} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{k}(\sqrt{1+k}+1)$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

c) $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(3h)}{2h\cos(h)}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(3h)}{\frac{2}{3}\cdot(3h)\cos(3h/3)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x \cdot \frac{2}{3}\cos(x/3)}$

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cos(0)} = \underline{3/2}$

minner oss om grense $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

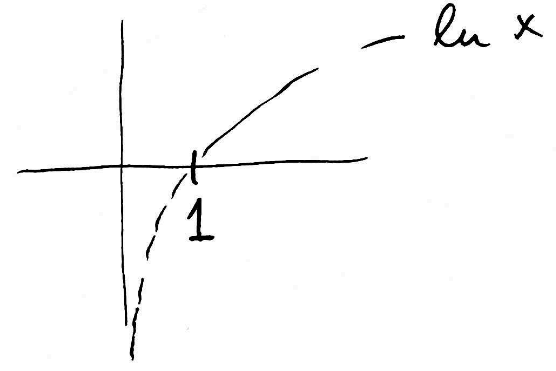
$3h = x$

$h \to 0$ svarer til $x \to 0$

oppgave Løs ulikheten.

$$2\ln x > \ln(3x-2)$$

definert for $x > 2/3$.



$$\ln x^2 - \ln(3x-2) > 0$$

$$\ln\left(\frac{x^2}{3x-2}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{3x-2} > 1$$

$$\frac{x^2}{3x-2} - \frac{3x-2}{3x-2} > 0$$

$$\frac{x^2-3x+2}{3x-2} > 0$$

$$\frac{(x-2)(x-1)}{3x-2} > 0$$

avgrenser oss til $x > 2/3$
$(3x-2 > 0)$

$$(x-2)(x-1) > 0$$

$\frac{2}{3}$ 1 2

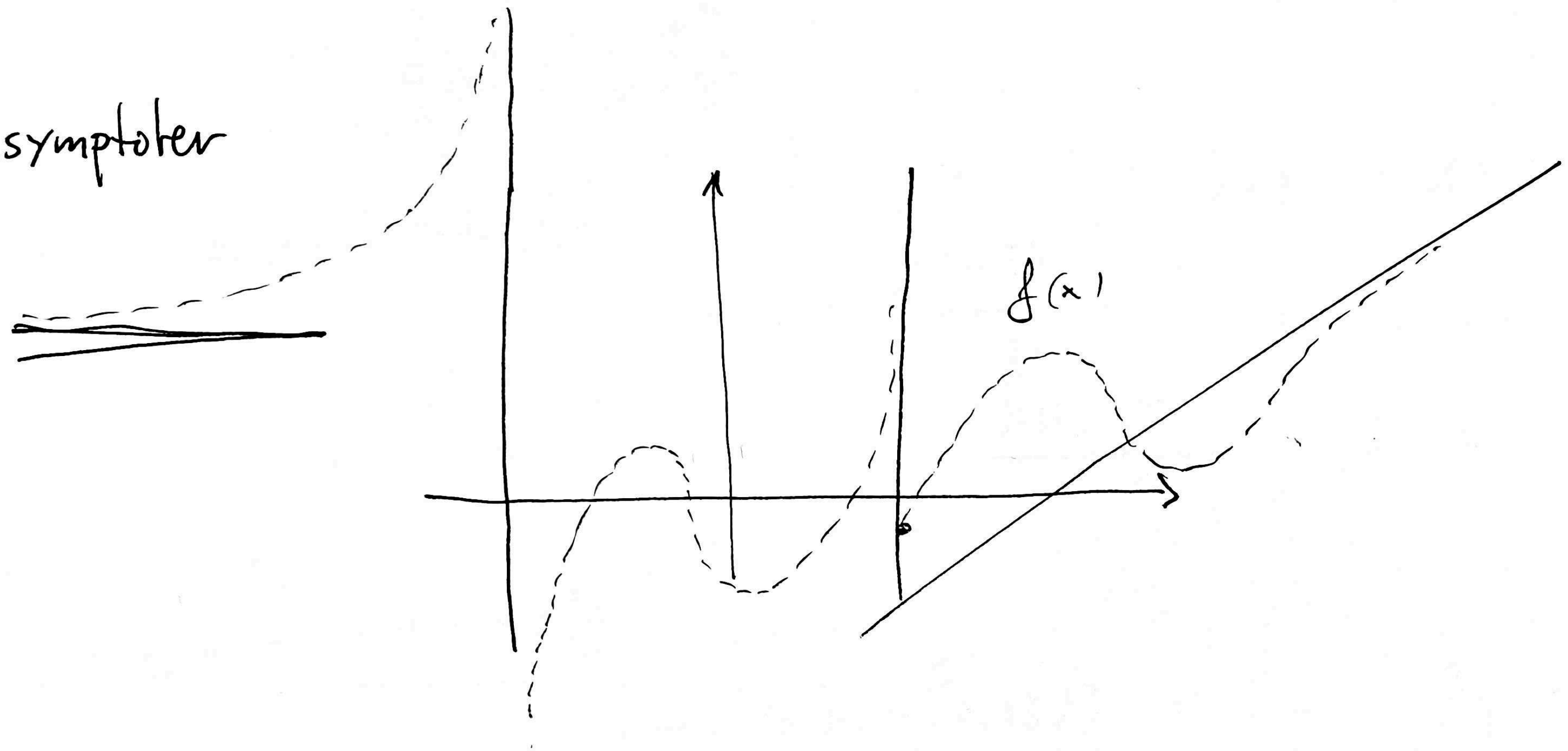
$x-2$

$x-1$

$(x-2)(x-1)$

Løsningsmengden er $\underline{\langle 2/3, 1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle}$

Asymptoter



$y = b$ horisontal asymptote $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = b$

eller $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

$y = ax + b$ skrå asymptote (horisontal når $a = 0$)

$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ eller $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$

Vertikal asymptote $\quad x = c$ (alle mulige y-verdier)

$\lim_{x\to c^-} f(x) = \begin{cases} \infty \text{ eller} \\ -\infty \end{cases}$ eller $\lim_{x\to c^+} f(x) = \begin{cases} \infty \text{ eller} \\ -\infty \end{cases}$

Eksempel $\quad q(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$

polynomdivisjon

$$
\begin{array}{l}
x^2 \quad : x-3 = x+3+\dfrac{9}{x-3} \\
\underline{x^2-3x} \\
\quad 3x \\
\quad \underline{3x-9} \\
\qquad 9
\end{array}
$$

$q(x) = \underline{x+3} + \dfrac{9}{x-3}$

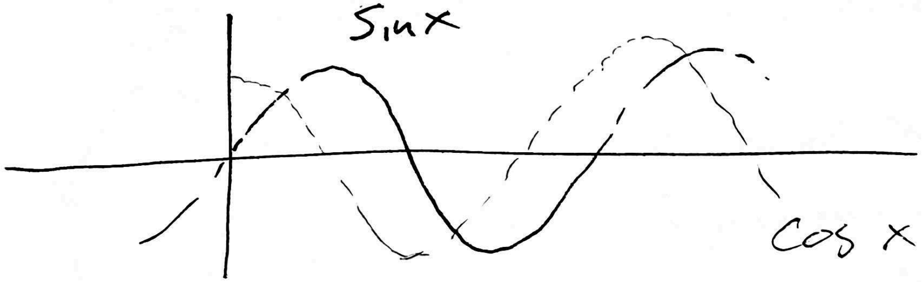
$$\lim_{x\to\infty}\left(q(x)-(x+3)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{x-3} = 0$$

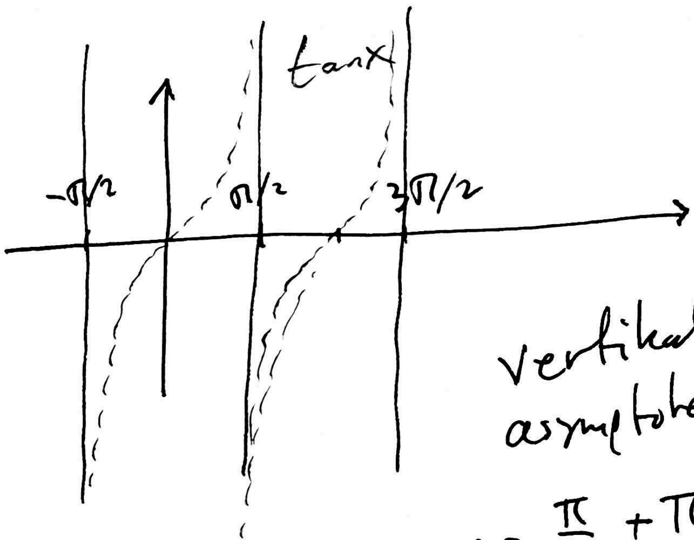
$y = x+3$ skrå asymptote for $q(x)$.

$x = 3$ vertikal asymptote

$$\lim_{x\to 3^+} q(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} q(x) = -\infty$$





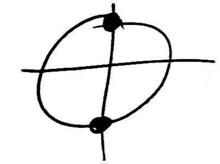
vertikale asymptoter

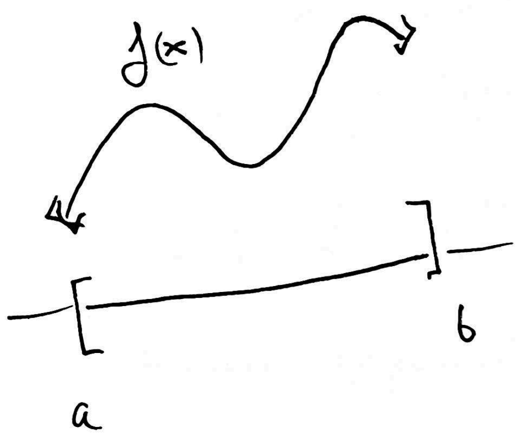
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$$

$n \in \mathbb{Z}$.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

det. når $\cos x \neq 0$



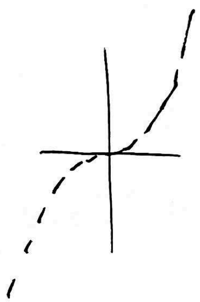


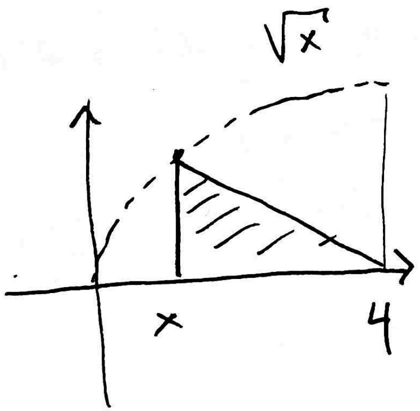
$f(x)$ kontinuerlig på $[a, b]$

Ekstremalverdisetning: Det finnes minimum og maksimumspunkt på $[a, b]$.

De er kritiske punkt:

1. $f'(x) = 0$ stasjonært punkt
2. $f(x)$ er ikke deriverbar
3. x er et endepunkt





$x \in [0, 4]$

For hvilke x er trekanten med hjørner $(x, 0)$, $(x, \sqrt{x})$, $(4, 0)$ størst mulig.

$A(0) = 0$
$A(4) = 0$

$$A(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{høyde}}\,\underbrace{(4-x)}_{\text{bredd}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{x} - x\sqrt{x}\right)$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(4 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} - \frac{3}{2} x^{1/2}\right)$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{x}}(4 - 3x)$$

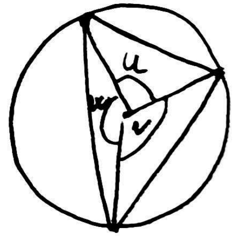
$A'(x) = 0$ når $x = \frac{4}{3}$. Kritiske punkt $x = 0, 4, \frac{4}{3}$.

Maksimumspunkt $\left(\frac{4}{3}, A\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{8}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$

Arealet er størst når $\underline{x = 4/3}$

Deve gav følgende oppgave : Vis at den største trekanten som kan innskrives i en sirkel må være likesidet.

Her er en måte å vise dette på (etter en del forsøk)



radius 1

$u + v + w = \pi$ $\quad u, v, w \geq 0$

Arealet er lik $A(u,v,w) = \frac{1^2}{2}(\sin u + \sin v + \sin w)$

La $w = \pi - u - v$

$A(u,v) = \frac{1}{2}(\sin u + \sin v + \sin(\pi - u - v))$

A størst når $\frac{d}{du} A(u,v) = 0$ (v holdes fast)

og $\frac{d}{dv} A(u,v) = 0$ (u holdes fast)

$\frac{d}{du} A = \frac{1}{2}(\cos u - \cos(\pi - u - v)) = 0 \quad : \quad u = \pi - u - v$

$\frac{d}{dv} A = \frac{1}{2}(\cos v - \cos(\pi - u - v)) = 0 \quad : \quad v = \pi - u - v$

Så $u = v$ og $\pi = u + v + u = 3u$

Vi har vist at $u = v = w = \pi/3$ gir $\underline{\text{størst areal}}$