

EKSAMENSSAMARBEIDENDE FORKURSINSTITUSJONER

Forkurs for 3-årig ingeniørutdanning og integrert masterstudium i teknologiske fag og tilhørende halvårig realfagskurs.

Universitetet i Sørøst-Norge, OsloMet, Høgskulen på Vestlandet, Høgskolen i Østfold, NTNU, Universitetet i Agder, Universitetet i Stavanger, UiT-Norges arktiske universitet, NKI, Metis.

Eksamensoppgave

MATEMATIKK

Bokmål

26. mai 2025

kl. 9.00-14.00

Hjelpemidler:

Godkjente formelsamlinger i matematikk og fysikk
Godkjent enkel kalkulator

Andre opplysninger:

Oppgavesettet består av 4 sider medregnet forsiden, og inneholder 9 oppgaver.

Ved vurdering teller alle deloppgaver likt.

Utregning eller begrunnelse må gis i alle oppgaver. Rene kalkulatorsvar godtas ikke.

$$\frac{4(x+2) - 5(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{-x + 13}{(x+2)(x-1)}$$

Oppgave 1

a) Trekk sammen brøkene, og skriv som kun én brøk.

$$\frac{4}{x-1} - \frac{5}{x+2} = \frac{13-x}{(x+2)(x-1)}$$

b) Gitt polynomet $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x-1)(x+3)(x+1) - 4$

Vis at $(x-1)$ er en faktor i $P(x)$, og faktoreris $P(x)$ mest mulig.

Papeke
P1

Oppgave 2

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \frac{3x^2 - 4}{x}$

$$= \frac{3x^2}{x} - \frac{4}{x} = 3x - \frac{4}{x}$$

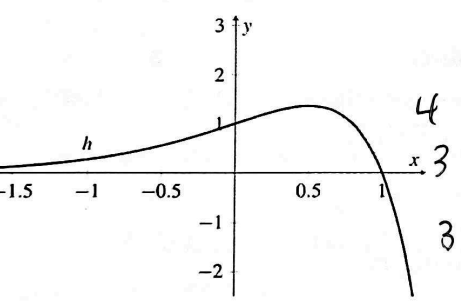
$$f' = 3 + \frac{4}{x^2}$$

b) $g(x) = 2 \sin(\pi x) + 2x^3$

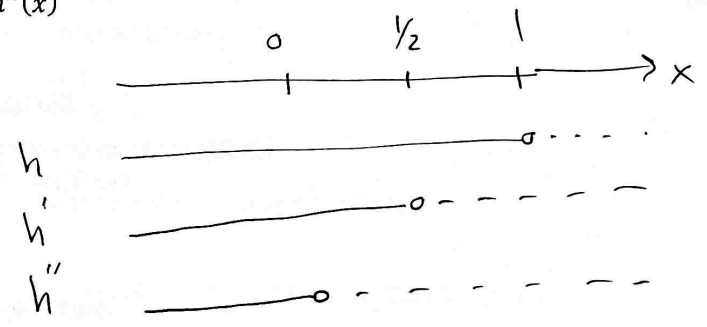
$$g' = 2\pi \cos(\pi x) + 6x^2$$

↑
mangle -3

Figuren under viser grafen til funksjonen h .



c) Tegn fortegnslinje for $h(x)$, $h'(x)$ og $h''(x)$



Oppgave 3

Løs ligningene

a) $2 \sin x + 1 = 0$

$$\sin x = -1/2$$

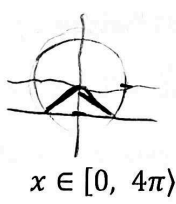
b) $\ln x - \ln(x+1) = 1$

$$\ln x + \ln(x+1)^{-1} = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

Løs ulikheten

c) $\frac{2x-4}{x+2} \geq 1$

$$\frac{x-6}{x+2} \geq 0$$



$$x \in [0, 4\pi)$$

$$\frac{x}{x+1} = e$$

$$\frac{5}{7} \mid \frac{7}{8}$$

$$\left\{ \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{19\pi}{8}, \frac{23\pi}{8} \right\}$$

Ø Løse for $x: -2 \leq x < -1$

$$x = \frac{-e}{e-1} < -1$$

$$\langle -\infty, -2 \rangle \cup [6, \infty)$$

2/4

$$-2 : -2$$

mangle 6 : -1

Komplement -3

$$x(x+2) = -6$$

Oppgave 4

Regn ut integralene

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \int \frac{u'}{u} dx = \ln|x^2+x| + C$ *utregning -4* *margin -2*

b) $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = (2x-1)e^x + C \Big|_0^1 = e+1$ *margin -4* *numerisk 3*

Oppgave 5

Trekanten ABC har hjørnepunktene A(2, 0, -1), B(-1, 1, 3) og C(1, 4, 4)

a) Finn \vec{AB} , \vec{AC} og $\vec{AB} - 2\vec{AC}$

$[-3, 1, 4]$ $[-1, -7, -6]$ *4, 4, 2*

b) Vis at ligningen til planet β utspent av punktene A, B og C kan skrives som

$\beta: x - y + z = 1$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = [-11, 11, -11]$

ufaktorert -2

c) P(2, 6, 2) er toppunktet i en pyramide der ΔABC er grunnflaten.

$\vec{AP} = [0, 6, 3]$

Finn volumet til pyramiden.

$V = \frac{33}{6} = \frac{11}{2}$ *margin -2*

d) En linje l står normalt på planet β og går gjennom punktet P.

Linja l skjærer xy-planet i punktet Q. Finn koordinatene til Q.

$x = 2+t$
 $y = 6-t$
 $z = 2+t$ *4*

$z=0, t=-2$
 $Q(0, 8, 0)$ *6*

$\frac{1}{3} \cdot \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{2} \cdot \vec{AP}$

Oppgave 6

I en aritmetisk rekke er det første leddet 5 og differansen mellom hvert ledd er 8.

$5 + 13 + 21 + 29 + 37 -$ *5*

a) Finn de fem første leddene i rekka, og finn summen av de 72 første leddene.

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 8$

$a_{72} = 573$

20808 *5*

b) Hvor mange ledd må det være i rekka for at summen skal bli minst 5 000, og hva er da verdien til det siste leddet?

38 ledd

$a_{38} = 285$

des. -3

-4

$35 = -2$

Oppgave 7

Arealet av en rettvinklet trekant er $16 m^2$. Summen av katetene er lik $12 m$.

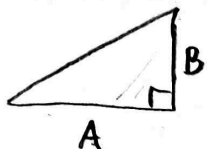
Hvor lange er katetene?

$A + B = 12$
 $A \cdot B = 32$ *3*

~~38 ledd~~
 ~~$a_{38} = 285$~~

$B_1 = 8 m$ $A_1 = 4 m$
 $B_2 = 4 m$ $A_2 = 8 m$

$3/4$



Oppgave 8

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = (x - 2)e^x$$

- a) Bestem definisjonsområdet og eventuelle nullpunkter til f
 b) Vis at den deriverte til f blir

ikke fallosial - 2

$$f'(x) = e^x(x - 1)$$

\mathbb{R} 3
 $x=2$ 7
 $e^x > 0$ ingen nullpunkt?
 -2

- c) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter til f , og bestem funksjonens monotoniegenskaper. Skriv svar med eksakte verdier.

$$f'(x) = 0 \text{ for } x = 1$$

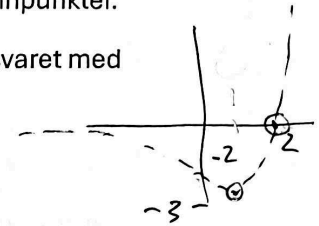
- d) Tegn grafen til f . Marker eventuelle nullpunkter, topppunkter og bunnpunkter.

- e) Finn ligningen for tangenten til grafen i punktet $(-1, f(-1))$. Skriv svaret med eksakte verdier.

$$y = \frac{-2}{e}x - \frac{5}{e}$$

4

ikke eksakt - 2



monotoni 4

Oppgave 9

Ved hjelp av andregradsformelen har det blitt laget følgende kode som løser alle andregradslikninger på formen $ax^2 + bx + c = 0$.

Linje 1 kan erstattes med: `from pylab import *`

numpy

```

1 from math import sqrt
2
3 a = float(input("a = "))
4 b = float(input("b = "))
5 c = float(input("c = "))
6
7 d = 
8
9 if d < 0:
10     print(")
11 elif d == 0:
12     print(", -b/(2*a))
13 else:
14     x_1 = (-b + sqrt(d))/(2*a)
15     x_2 = (-b - sqrt(d))/(2*a)
16     print("Likningen har to løsninger: x = ", x_1, "og x = ", x_2)
    
```

$$b^{**2} : 8 \text{ pt}$$

$$b^{**2} - 4*a*c \left(\begin{matrix} -5 \\ 6^2 - 4ac \end{matrix} \right)$$

- a. I linje 7 skjules en del av koden under den sorte boksen. Hva skal det stå der? Skriv svaret slik du ville gjort i koden.

- b. Finn en passende tekst som kan skrives i de to røde boksene i linje 10 og 12.

1b) Løse $P(x)$ være et polynom. Da er $(x-a)$ en faktor i

$P(x)$ hvis og bare hvis $P(a) = 0$.

Hvis lin.
genlitt

$$P(x) = (x-a) \cdot q(x)$$

$$P(x) : (x-a) = q(x) + \frac{P(a)}{x-a}$$

generelt:

* Hvis ax^2+bx+c har røtter (nulpunkter) r_1 og r_2 (kan være like)
så $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$.

4a) Variant $\int \frac{2x-1}{x^2+x} dx$ Delbrøksopspaltning

$$\frac{2x-1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x^2+x} = \frac{(A+B)x + A}{x^2+x}$$

$$\begin{aligned} \text{så } A+B &= 2 \\ A &= -1 \\ B &= 2-A = 3. \end{aligned}$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2+x} dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{3}{x+1} dx = \frac{-\ln|x| + 3\ln|x+1| + C}{(\text{brøktøjser})} = \ln \left| \frac{(x+1)^3}{x} \right| + C$$

Løs ulikheden

$$\frac{x^2-1}{2x-1} \leq 1$$

$$\frac{x^2-1}{2x-1} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x^2-1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x-1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-2x}{2x-1} \leq 0$$

$$\frac{x(x-2)}{2x-1} \leq 0$$

0 $\frac{1}{2}$ 2



Løsningsmængden

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right] \cup \left(-\infty, 0\right]$$