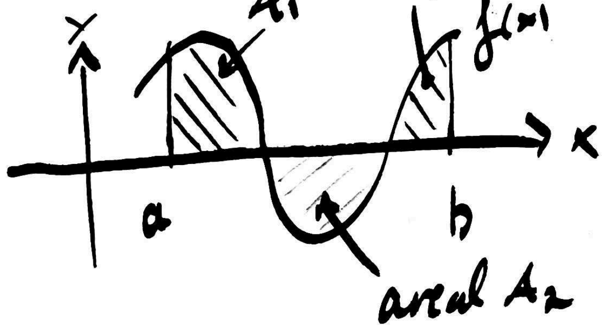
13 april
26

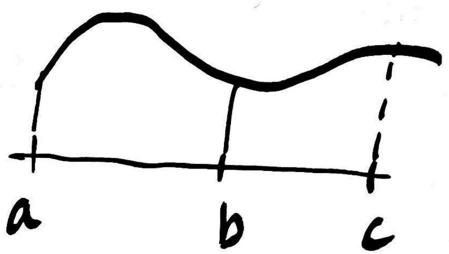
15C Bruk av bestemte integral.

$\int_a^b f(x)\,dx$ bestemt integral av $f(x)$ fra a til b med hensyn til x.



$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$

"areal med fortegn" mellom grafen til $f(x)$ og x-aksen fra a til b.



$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

"Bytte av integralgrensene svarer til å snu fortegnet til et integral".

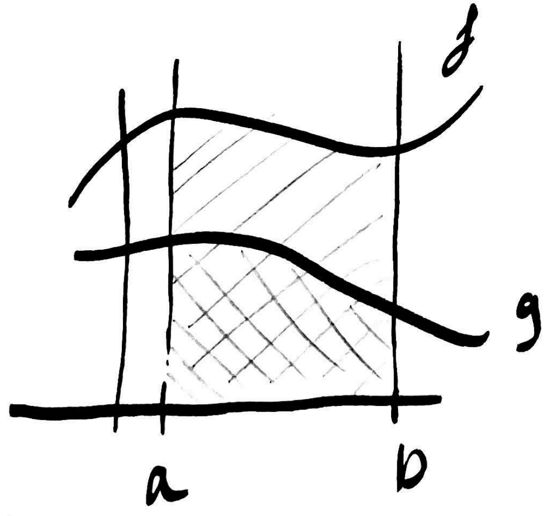
$$\int_3^{-1} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{3} f(x)\,dx.$$

Bestemte integral er lineære

* $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
* $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

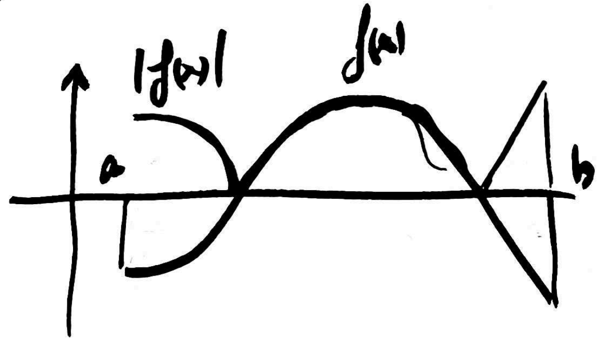
Følger fra definisjonen.

$f(x) \geq g(x)$

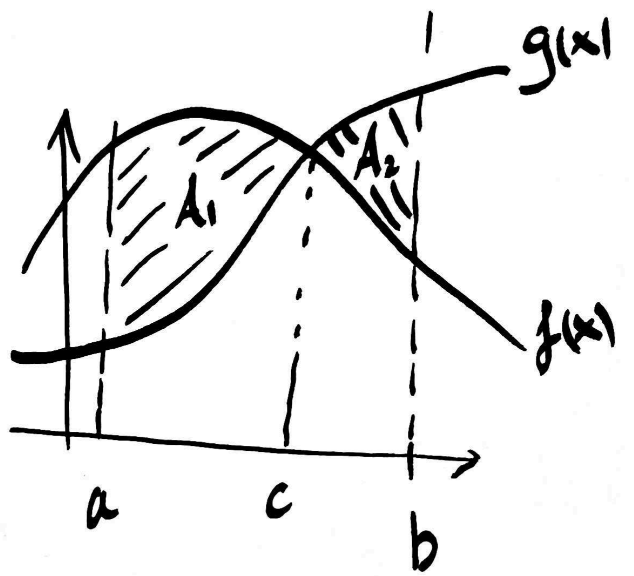


$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b (f-g)(x)\,dx.$$

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ areal mellom grafen til $f(x)$ og x-aksen fra a til b.



$\int_a^b |f(x)|\,dx$ er ikkje lineær i $f(x)$



$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)-g(x)\,dx}_{A_1} + \underbrace{\int_c^b (f-g)(x)\,dx}_{-A_2}$$

$$= A_1 - A_2$$

"areal med forteikn mellom f og g"

$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = A_1 + A_2$

areal mellom grafen til f og grafen til g frå a til b.

$$\frac{4^3}{3} - 4\frac{4^2}{2} + 3\cdot 4$$

$$= 4\left(\frac{4^2}{3} - \frac{4^2}{2} + 3\right) = 4\left(4^2\underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}_{=\frac{-1}{6}} + 3\right)$$

$$= 4\left(\frac{-4^2}{6} + 3\right)$$

$$= 4\left(-\frac{2\cdot 4}{3} + \frac{9}{3}\right) = \underline{\frac{4}{3}}$$

b) $f(x) \geq 0$ i $[0,1]$ og $[3,4]$, $f(x) \leq 0$ i $[1,3]$.

$$\int_0^4 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x) + \int_1^3 -f(x)\,dx$$

symmetri $\underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{A_1} = \underbrace{\int_3^4 f(x)\,dx}_{A_3}$ $= \int_0^1 x^2 - 4x + 3\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \Big|_0^1$

$$= \frac{1}{3} - 2 + 3 = 1 + \frac{1}{3} = \underline{\frac{4}{3}}$$

$$A_2 = -\int_1^3 x^2 - 4x + 3\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_1^3$$

$$= -\left(\frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3\right) + \frac{4}{3}$$ (ved utregningen ovenfor.)

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ $\qquad a = 0,\ b = 4.$

a) Areal med fortegn $\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^4 x^2 - 4x + 3\,dx$

b) Areal mellom x-aksen og $f(x)$ fra 0 til 4.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

nullpunkt i 1 og 3.

$f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$

$f(0) = 3$

$f(4) = 3$

symmetrisk i $x = 2$

a) $\int_0^4 x^2 - 4x + 3\,dx = \int_0^4 x^2\,dx + (-4)\int_0^4 x\,dx + 3\int_0^4 1\,dx$

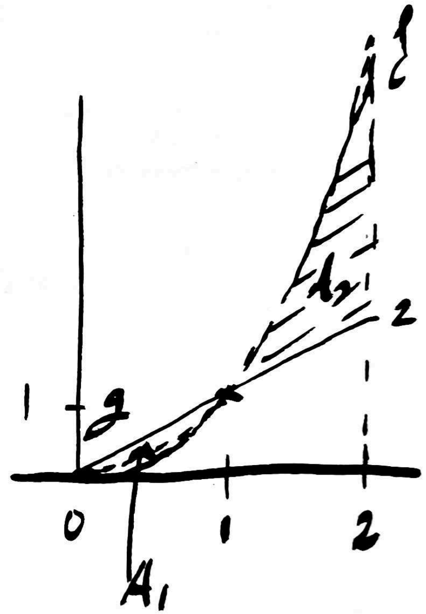
$$\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 - 4\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 + 3x\Big|_0^4$$

$$A_2 = -\underbrace{(3^2 - 2\cdot 3^2 + 3^2)}_{0} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

Arealet mellom $f(x)$ og x-aksen : $A_1 + A_3 + A_2$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \underline{4}$$

$f(x) = x^3$, $g(x) = x$ $\quad a = 0$, $b = 2$



a) Areal m. fortegn mellom f og g.

$$\int_0^2 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^2 x^3 - x\,dx$$

$$= \int_0^2 x^3\,dx - \int_0^2 x\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$= 4 - 2 = \underline{2} = \underline{A_2 - A_1}$$

b) Arealet mellom grafene til f og g fra 0 til 2.

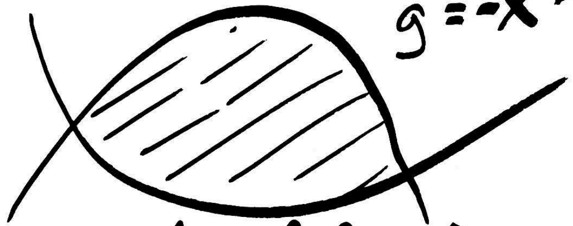
$$\int_0^2 |f-g|(x)\,dx = A_1 + A_2 = (A_2 - A_1) + 2A_1$$

Finner $A_1 = \int_0^1 x - x^3\,dx$ $\left(= -\int_0^1 (f-g)(x)\,dx = \int_0^1 |f-g|(x)\,dx \right)$

$$A_1 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \underline{\frac{1}{4}}$$

Arealet er $2 + 2\cdot\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{2} = \underline{2.5}$

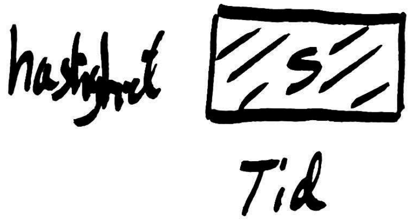
Forelesning 24.03.2023
(på fausk.com)



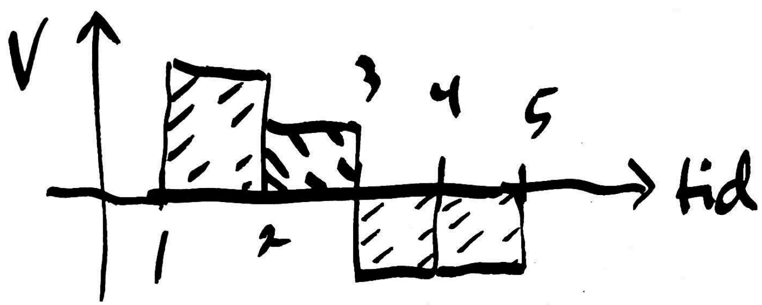
Finn arealet avgrenset av f og g (mellom f og g)

* Hvor møtes grafene $f(x) = g(x)$ — Her: -2 og 3
* Arealet $\int_{-2}^{3} |g(x) - f(x)|\,dx = \int_{-2}^{3} g(x) - f(x)\,dx$

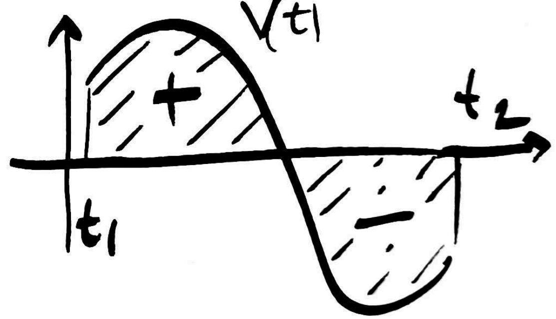
Her: $\underline{41 + \frac{2}{3}}$



S forflytting er $V \cdot t$ (V: hastighet, t: tid)



Forflytning $S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt$



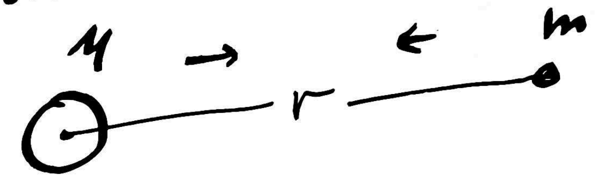
Distanse tilbakelagt $\int_{t_1}^{t_2} |V(t)|\,dt$

Arbeid $\quad W = F \cdot s \quad$ kraft gange veg.

$(\vec{F} \cdot \vec{s})$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \, ds$$

Jorden



Eksempel $\quad$ Gravitasjonskraft $\quad F = -\dfrac{GmM}{r^2}$

arbeid utført ved å forflytte det lille objektet med masse m fra en distanse R_1 til R_2 fra objektet med masse M_2.

$$W = \int_{R_1}^{R_2} -F \, dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} GmM \cdot \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{r^{-2}} dr$$

$$= GmM \left[\underbrace{\frac{-1}{r}}_{-r^{-1}} \right] \Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$W = GmM \left(\frac{-1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) = \underline{GmM \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

$$\left(\begin{aligned} &(-r^{-1})' \\ &= (-1)(-1) r^{-1-1} \\ &= 1 \cdot r^{-2} \\ &= 1/r^2 \end{aligned} \right)$$

$R_2 \to \infty$

$$W = \frac{GmM}{R_1}$$ (endelig!)

Unslipningshastigheten $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{GmM}{R}$ Jordens masse M Radius R.

$$v^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \sim \underline{11.2\,km/s}$$

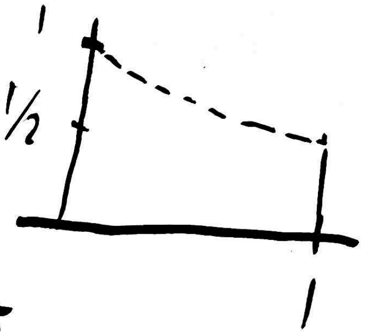
Økonomi: P fortjeneste / mengde solgt marginal fortjeneste.

Total fortjeneste $P = \int_{x_1}^{x_2} P(x)\,dx$

Øving.

15.32

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$



ganger med 4 : $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$0.5 = \frac{1}{2} < \int < \frac{3}{4} = 0,75$$

Forklaring:

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \underbrace{\arctan x}_{\text{antiderivert til } \frac{1}{1+x^2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \right)$$

Benytter numerisk integrasjon til å estimere π.

Simpsons metode 10 delintervaller: 8 riktige siffer av π

100 — 11 — 14 ...

$\tan 45° = 1$

$y = \tan x$

$x = \arctan y$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\arctan y}{dy},$$

$$= \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\tan x)'$$

$$= 1 + \tan^2 x$$

$$= 1 + y^2$$

15.35 $V(t) = 2{,}55 \cdot 0{,}88^t = 2{,}55\, e^{-kt}$

$-k = \ln(0{,}88)$

$k \approx 0{,}128$

$a > 0$

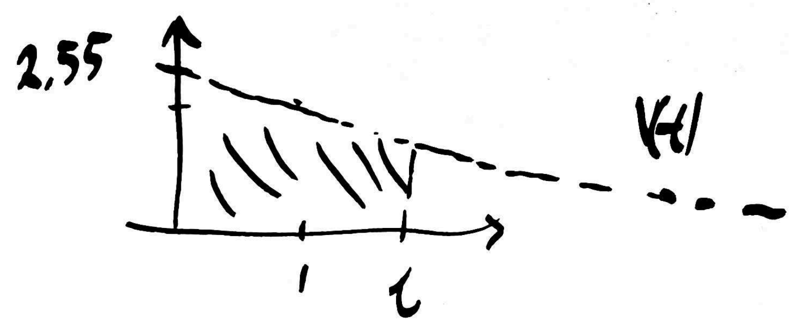
$a = e^{\ln a}$

$a^t = (e^{\ln a})^t$

$= e^{\ln a \cdot t}$

$\ln a < 0$ når $0 < a < 1$

og $\ln a > 0$ når $a > 1$

a) 

tid i minutter

$V(t) > 0$ enhet til arealet

b) $\frac{L}{min} \cdot min = L$

$\left(\frac{L}{min} \cdot sek = \frac{L}{60\,sek} \cdot sek = \frac{1}{60} \cdot Liter \right)$

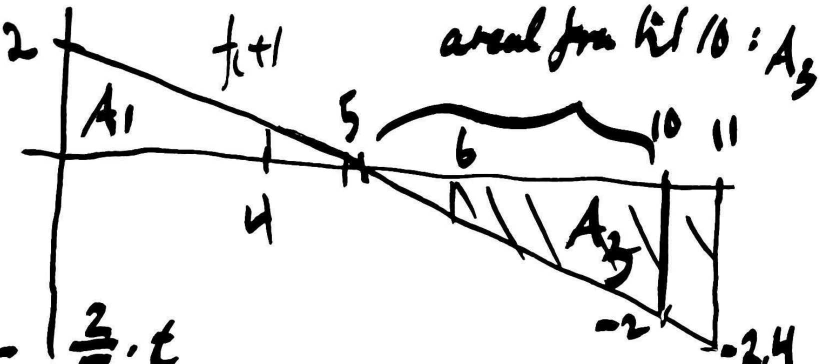
c) $\int_0^{10} V(t)\,dt$

d) $\int_0^{\infty} V(t)\,dt$

antar at tanken tømmes

regnet numerisk...

15.4



$f(t) = 2 - \frac{2}{5} \cdot t$

siden $f(0) = 2$ og $f(5) = 0$

$f(11) = 2 - \frac{2}{5} \cdot 11 = 2 - \frac{22}{5} = \frac{10-22}{5} = \frac{-12}{5} = -2{,}4$

a) A_2 (til 11) $= \frac{\text{bredde} \cdot \text{høyde}}{2} = \frac{6 \cdot 2{,}4}{2} = 6 \cdot 1{,}2$

$\underline{A_2 = 7{,}2}$

b) $\int_5^{10} f(t)\,dt$

~~c)~~ $\int_0^{10} f(t)\,dt$

c) Bestem b s.a $\int_4^b f(t)\,dt = 0$

b) $\int_5^{10} f(t)\,dt = -\frac{\overset{\text{bredde}}{5} \cdot \overset{\text{høyde}}{2}}{2} = \underline{-5}$ $(= -A_3)$

$\int_0^{10} f(t)\,dt = A_1 - A_3 = 0$ siden $A_1 = A_3 = 5$

c) $\int_4^b f(t)\,dt = 0$ når $b = 6$ (se figuren)

d) $\int_0^b f(t)\,dt$ blir størst mulig når $b = 5$ (etter 5 får vi negativt bidrag til integralet)