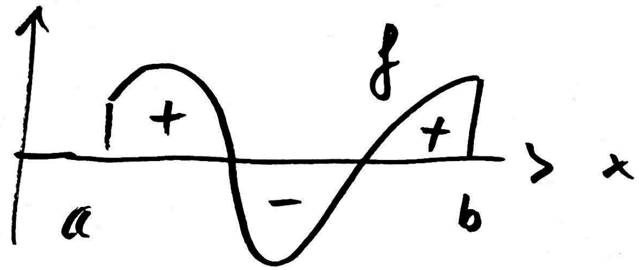
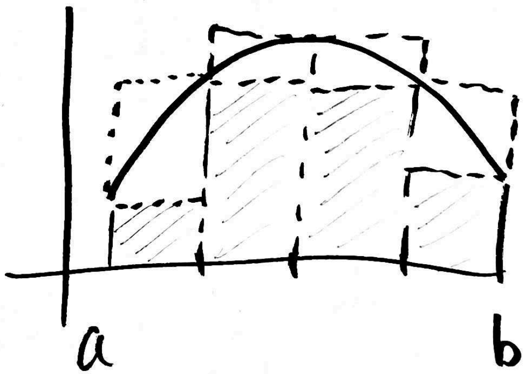
8 april 2026   15B

Numerisk integrasjon

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



Eksisterer for kontinuerlige funksjoner på $[a,b]$



Deler $[a,b]$ i n deler

bredde til hver del $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

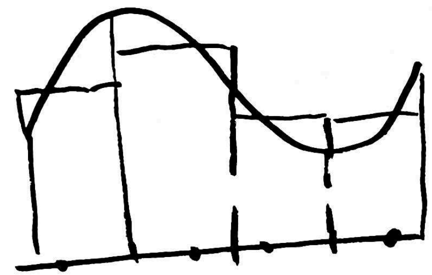
Øvre estimat: $Ø_n$

nedre estimat N_n

f er integrerbar på $[a,b]$ hvis $\lim_{n\to\infty} N_n = \lim_{n\to\infty} Ø_n$

verdien er da $\int_a^b f(x)dx$

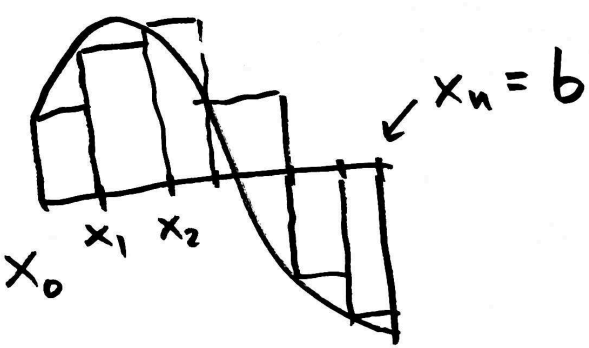
Rektangelmetode



Venstre rektangelmetode

Velger funksjonsverdien til venstre i hvert av delintervallene

$$Vr_n = \Delta x \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right)$$



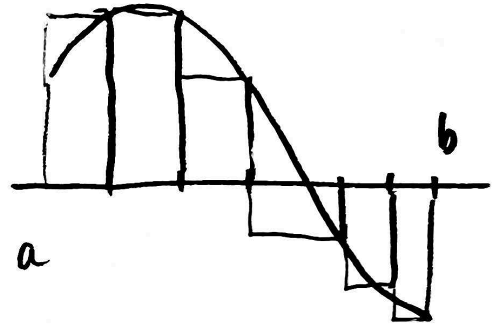
Bredde på delintervallen

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\underline{x_i = a + i \cdot \Delta x}$$

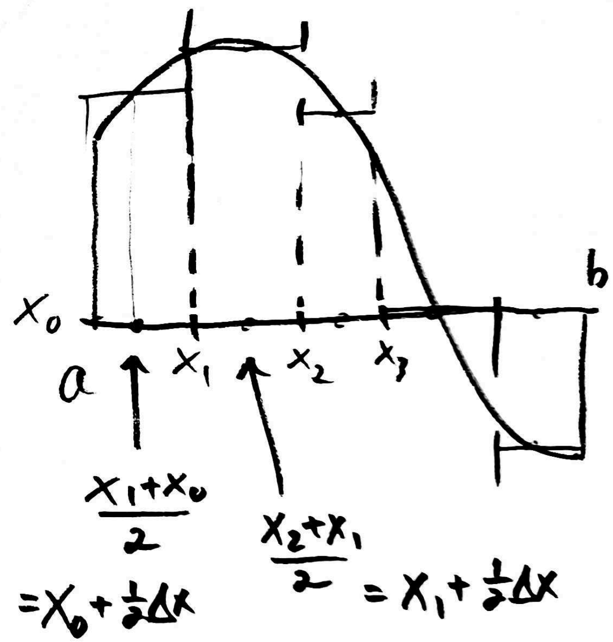
Høyre rektangelmetode (tilsvarende Vr)

$$hr_n = \Delta x \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \right)$$
$$= \Delta x \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) - \Delta x (f(x_0)) + \Delta x (f(x_n))$$
$$= Vr_n + (f(x_n) - f(x_0)) \Delta x .$$



Midtpunktmetoden

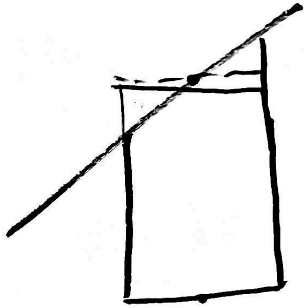
Benytter funksjonsverdiene til ~~x~~-verdien i midten av hvert delintervall



$$mp_n = \Delta x \left(\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} \right) \right)$$
$$= \Delta x \left(\sum_{i=0}^{n} f\left(x_0 + \tfrac{1}{2}\Delta x\right) \right)$$

vr og hr eksakt på konstante funksjoner

mp er eksakt på lineære funksjoner $y = ax + b$

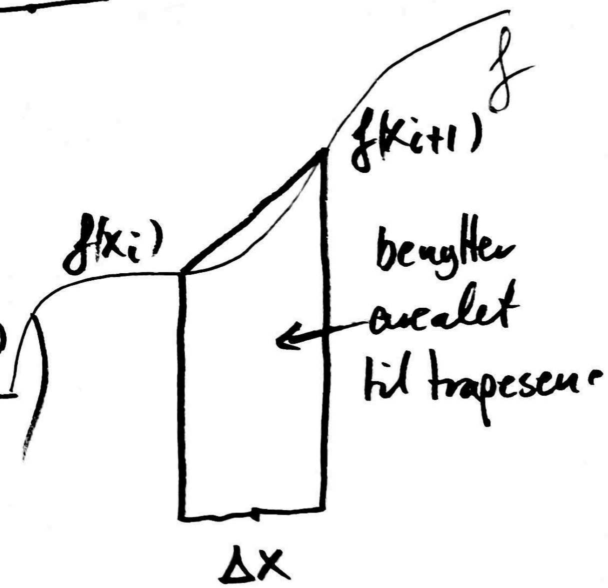


Trapesmetoden.

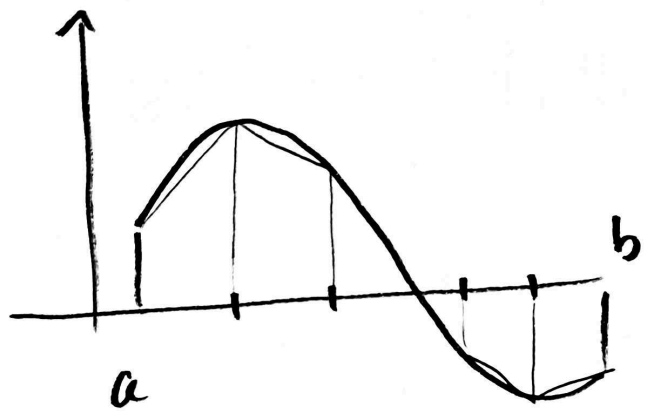
$$tm_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \right)$$

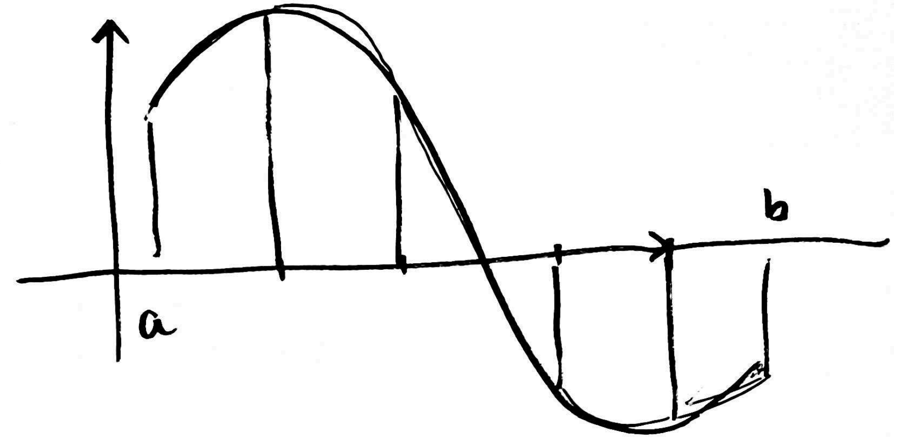
$$= \frac{1}{2}\left(vr_n + hr_n \right)$$

$$\Delta x \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \right)$$



eksakt på lineære funksjoner.





Ønsker en metode som gir eksakt svar på 2.grads uttrykk.

Simpsons metode er eksakt på 2.grads (og 3.grads) uttrykk.

$$Sm_n = \frac{2}{3} mp_n + \frac{1}{3} tm_n$$

Simpsons metode regnet ut direkte.

Vekting $1, 4, 1$

$1\ 4\ 1$

$1\ 4\ 1$ ..

$1\ 4\ 2\ 4\ 2\ 4\ 2 \cdots \quad 2\ 4\ 1$

1 intervall $$\frac{f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)}{6}(b-a)$$

—

tm og mp er eksakt på lin. funksjoner

$\underline{s+t=1}$

Så $s \cdot tm_n + t\,mp_n$

er også eksakt på lin. funksjoner

Vi ønsker å velge s og t, med $s+t=1$,
slik at $s \cdot tm_n + t \cdot tm_n$ er eksakt
på 2.grads uttrykk $y = \mathring{a}x^2+bx+c$. La $\mathring{a}=1$.

$(x-a)^2$

$$tm_1 = c\cdot\left(\tfrac{1}{2}(0+c^2)\right) = \tfrac{1}{2}c^3.$$

$$mp_1 = c\cdot\left(\tfrac{c}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}c^3.$$

$$s\left(\tfrac{1}{2}c^3\right) + t\left(\tfrac{1}{4}c^3\right) = \tfrac{1}{3}c^3$$

$$\frac{s}{2} + \frac{t}{4} = \frac{1}{3} \quad | \times 4$$

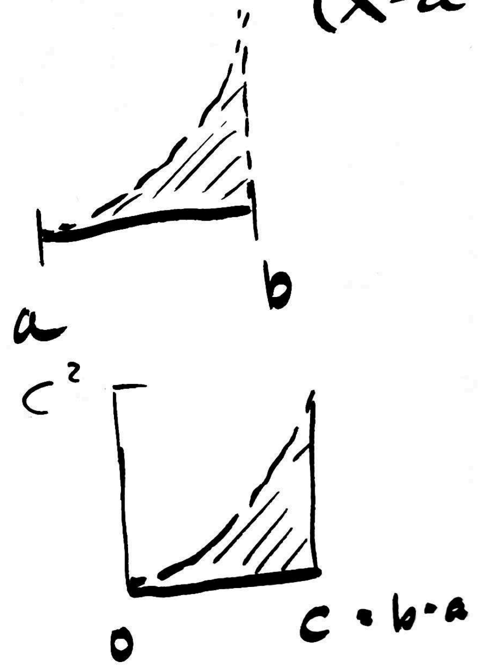
$$2s + t = \frac{4}{3}$$

og $s + t = 1$

så (L1-L2)

$$s = \tfrac{4}{3} - 1 = \tfrac{1}{3}$$

$$\underline{t = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}.}$$



$$\int_0^c x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^c = \underline{\underline{\frac{c^3}{3}}}$$

Innlevering	Fork1120 - Matematikk forkurs OsloMet
	Obligatorisk innlevering 7
Innleveringsfrist	Tirsdag 7. april 2026
Antall oppgaver:	11

Oppgave 1. Finn summen av de følgende endelige geometriske rekkene.

$8 + 16 + 32 + \cdots + 8192$ $k=2$ starter med 2^3 og slutter med 2^{13}

$3 + 4 + 16/3 + \cdots + 1024/81$ $k=4/3$

$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}$ $k=-1$, $\text{sum} = \begin{cases} 0 & n \text{ partall} \\ 1 & n \text{ oddetall.} \end{cases}$

Sistnevnte rekke har n ledd.

Oppgave 2. Avgjør om de følgende uendelige geometriske rekkene konvergerer, og i så fall finn summen.

$6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + - \cdots$ $k = \frac{-1}{3}$ konvergerer.

$0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$ $= \frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{1-1/10}\right) = \frac{1}{9}$

$= 0.1111\ldots$

$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \cdots$ $k=2$ divergere

Oppgave 3. Vis at summen av alle tallene på formen

2^n3^m

hvor $0 \leq n \leq 11$ og $0 \leq m \leq 5$, er lik 1 490 580. (Det er $12 \cdot 6 = 72$ slike tall.)

$\left(\sum_{n=0}^{11} 2^n\right)\left(\sum_{m=0}^{5} 3^m\right)$

Oppgave 4. Finn summen til de aritmetiske rekkene

a) $-4 - 1 + 2 + 5 + \cdots + 95$ $d=3$

a_1 a_n

b) $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \cdots + 150$ $d=1/2$

c) $-100 - 98 - 96 - \cdots - 82$

$d=2$, det er 10 ledd.

$a_n = -4 + 3(n-1)$

$95 = -4 + 3(n-1)$

$99 = 3(n-1)$

$33 = n-1$ så

antall ledd $\underline{34}$

Oppgave 5. a) Finn summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000.

b) Finn summen av alle positive partall som er mindre enn eller lik 1000.

c) Finn summen av alle naturlige tall som er delelige med 5 og mindre enn eller lik 1000.

d)* Finn summen av alle naturlige tall som er delelige med 2 eller 5 (eller begge) og mindre enn eller lik 1000.

Oppgave 6. Hvor mange ledd må dere ha med i den aritmetisk rekken

$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \cdots + (3n - 2)$$

som starter med 1 og hvor etterfølgende ledd øker med 3, for at summen skal bli nærmest mulig 1000? Hva er summen da?

Oppgave 7. Finn summen til rekkene som en funksjon av n

$$a) \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2i}}{3^i} \qquad b) \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i \qquad c) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)}$$

Oppgave 8. Vi setter inn 1000 kr hvert år fra 1.1.2022 til og med 1.1.2030. Hvor mye penger har vi på kontoen ved utgangen av 2040 hvis årlig rente i hele perioden er 10%?

Oppgave 9. a) Beskriv det rasjonale tallet

$$0.1231231213\ldots = 0.\underline{123} = 123 \cdot \frac{1}{1000}\left(1 + \frac{1}{1000} + \left(\frac{1}{1000}\right)^2 + \cdots\right)$$

som en brøk.

$$= 123 \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{1 - 1/1000}\right) = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

b) Hva må x være for at den uendelige geometriske rekken

$|x| < 1$ $$x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = x^2 \frac{1}{1-x} = 2$$

skal konvergere til 2? 2.grads likning $x^2 + 2x - 2 = 0$

c) Finn summen av inversen til alle de naturlige tallene som bare er delelige med primtallene 2, 3 og 5. Det vil si finn summen av alle tall på formen

$$\frac{1}{2^k 3^l 5^m}$$

tilsvarende oppg 3.

for $k, l, m \geq 0$. Ordnet etter avtagende størrelse ser rekken ut som

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \cdots$$

Oppgave 10. Vis at hvis en rekke $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$ konvergerer, da må leddene x_n i rekken gå mot null når n går mot uendelig. Gi eksempel på at det ikkje er et tilstrekkelig krav for at rekken skal konvergere. Med andre ord gi et eksempel på en rekke hvor leddene går mot null, men hvor rekken ikkje konvergerer.

Oppgave 11. Bestem for hvilke x den geometriske rekken

$$\cos(x)/2 + \cos^2(x) + 2\cos^3(x) + \cdots$$

konvergerer. Finn summen til rekken når den konvergerer.

$|2\cos x| < 1$

geometrisk ulikhet.

oblig 7 #5 a) $\Sigma_{n=1}^{1000} n = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500 \cdot 1001$

$= 500\,500$

b) $T_2 = \Sigma_{n=1}^{500} 2n = 2 \Sigma_{n=1}^{500} n \ldots$

c) $T_5 = \Sigma_{n=1}^{200} 5n = 5 \Sigma_{n=1}^{200} n$

d*) $T_2 + T_5 - T_{10}$ = summen av tallene som er delelige med 2 eller 5.

$T_{10} = \Sigma_{n=1}^{100} 10n = 10 \Sigma_{n=1}^{100} n.$

#6

$S_n = \sum_{i=1}^{n} (3i - 2)$ nærmest mulig 1000

$3 \Sigma_{i=1}^{n} i - 2 \Sigma_{i=1}^{n} 1 = 3 \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{3n^2 + 3n - 4n}{2}$

$S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$, $S_n = 1000$ $3n^2 - n = 2 \cdot 1000$ tilnærmet $n^2 \approx \frac{2000}{3}$.

$n = \sqrt{\frac{2000}{3}} \approx 25.81$

$$S_{26} = \frac{3 \cdot 26^2 - 26}{2} = 1001$$

Sn er en økende funksjon (siden leddene er positive)

$$S_{25} = 925$$

summen er nærmest 1000 når vi tar med 26 ledd, og summen er da lik 1001.

#7 a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2i}}{3^i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{3}\right)^i$ geometrisk ...

b) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i = \underbrace{-1+2}_{1} \underbrace{-3+4}_{1} - \underbrace{5+6}_{1} - + \cdots$

$$= \begin{cases} n/2 & n \text{ er et partall} \\ -(n+1)/2 & n \text{ oddetall} \end{cases}$$

$\frac{n-1}{2}$ par med verdi 1

$+ \; (-1)^n n$

$$= \frac{n-1}{2} - n = \frac{n-1-2n}{2} = \frac{-1-n}{2}$$

7 c) $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots$

$$\frac{1}{i(i+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \dots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$S_n = \underline{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}$$

$r = 10\% = 0.1$

8. setter inn 1000kr : 1.1.2022 til og med 1.1.2030.
Hvor mye penger er det på kontoen ved <u>utgangen</u> av 2040.

Penger 1.1.2030 : $P_0 = 1000kr\,(\underbrace{1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots (1+r)^8}_{9 \text{ ledd}})$

Penger ved utgangen av 2040 : $P = P_0 (1+r)^{11}$

$1000kr \, \frac{(1+r)^9 - 1}{1+r-1}(1+r)^{11} = 10\,000kr\,((1.1)^9 - 1)\,1.1^{11}$

$\sim 38\,000$ kr.