7 april

15 Integrasjon

(3 uker)

Uke 15 tirsd. oversikt: 15A $\int_a^b f(x)dx$
15D $\int f(x)dx$

onsd. 15B Numerisk integrasjon
Python

Uke 16

- 15C Bruk av bestemte integral

- } 15D Fundamental teoremet, ubestemte integral
-

Uke 17

- } 15E Integrasjonsmetoder
-

- 15F Volum ved integrasjon.

15A Bestemte integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integral-tegnet

integrand

differensial

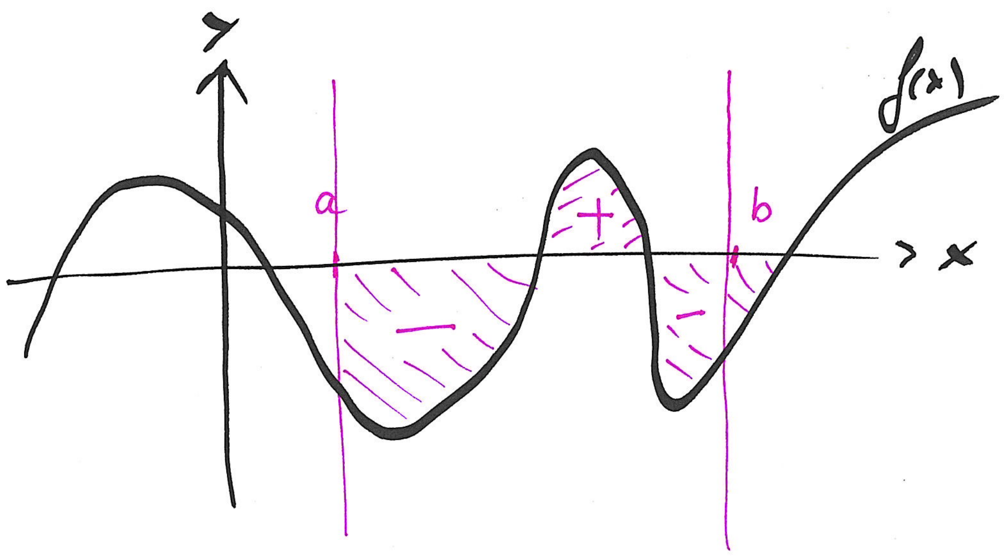
"Integralet av $f(x)$ fra a til b med hensyn til x"

a nedre integralgrense

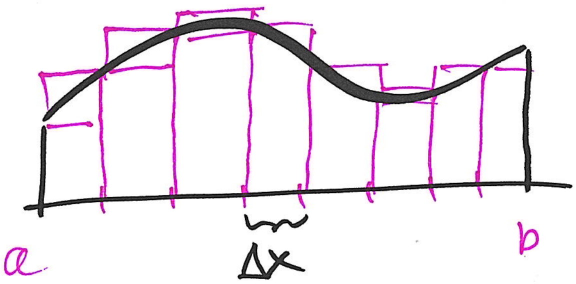
b øvre integralgrense

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

"areal med fortegn" mellom grafen til $f(x)$ og x-aksen, avgrenset av de vertikale linjene $x=a$ og $x=b$.



$\int_a^b f(x)\,dx$ eksisterer ikke alltid.



Deler intervallet $[a,b]$ i n deler

Bredden $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Nedre estimat N_n = summ av areal m. fortegn av rektanglene under grafen i hver av delene (og som er størst mulig)

Øvre estimat Ø_n = tilsvarende.

$f(x)$ er integrerbar i $[a,b]$ hvis

$$\lim_{n\to\infty} N_n = \lim_{n\to\infty} \text{Ø}_n$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ er da lik desse grensene.

Resultat: Alle kontinuerlige funksjoner på $[a,b]$ er integrerbare.

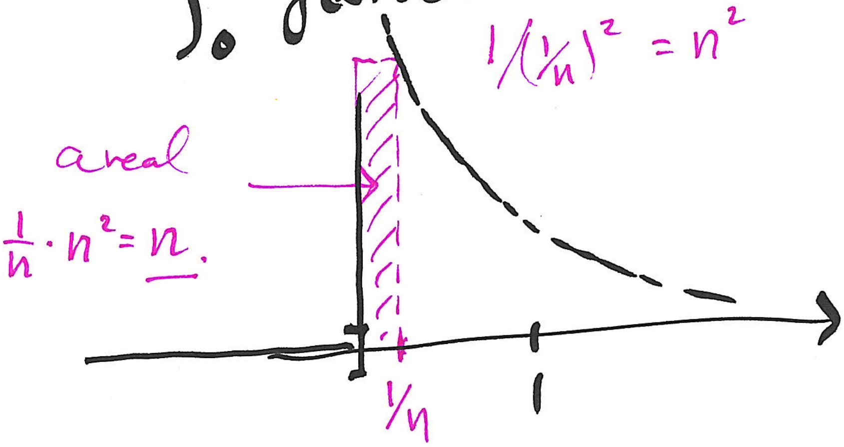
Eksempler på funksjoner som ikke er integrerbare.

* $$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

ubegrensa.

ikke kontinuerlig i $x=0$.

$\int_0^1 f(x)\,dx$ eksisterer ikkje.

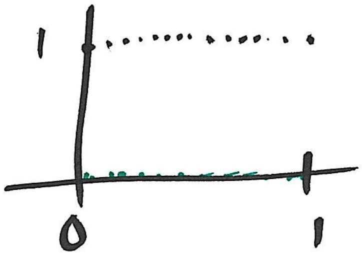


$$\lim_{n\to\infty} N_n > \lim_{n\to\infty} n \;(= \infty.)$$

grensen eksisterer ikke.

* $$t(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rasjonalt tall} \\ 0 & x \text{ irrasjonalt tall} \end{cases}$$

$t(1/3) = 1 \qquad t(\sqrt{2}) = 0 \quad \ldots$

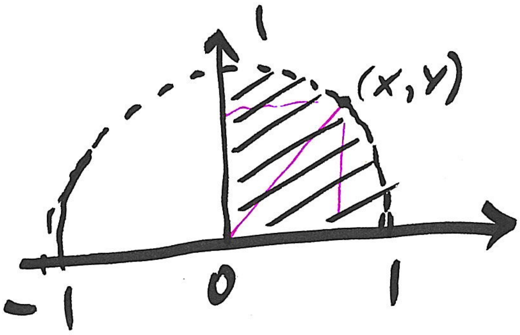


$N_n = 0$ og $\Phi_n = 1$ for alle n

$$\lim_{n\to\infty} N_n = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \Phi_n = 1$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

(en firedel av arealet til en sirkel med radius lik 1)

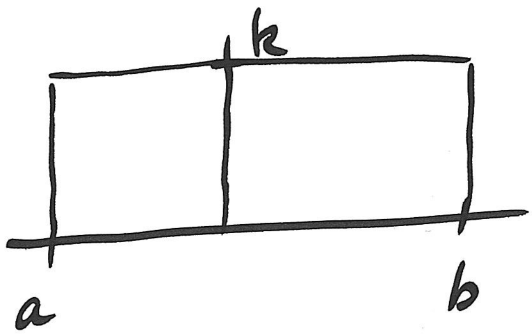


$y = \sqrt{1-x^2} \geq 0$

$y^2 = 1 - x^2 \iff x^2 + y^2 = 1$

sirkel med radius 1

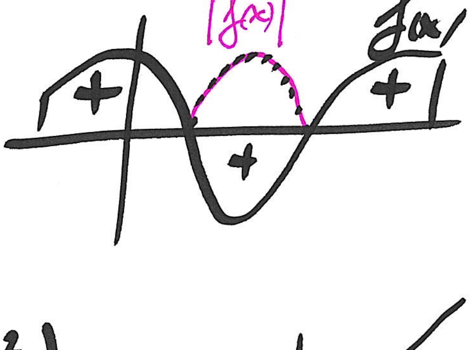
$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$



—

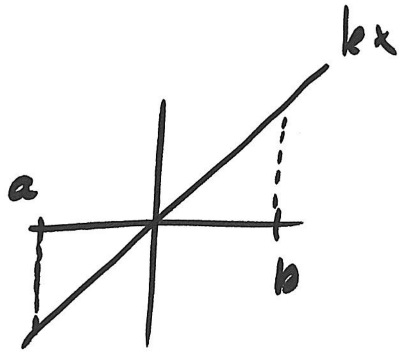
Areal mellom grafen til $f(x)$ og x-aksen fra $x=a$ til $x=b$

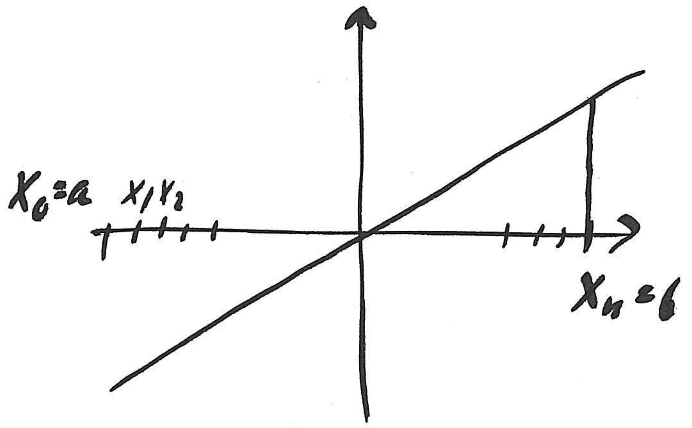
$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$



—

$$\int_a^b kx\,dx = \underline{\frac{k}{2}(b^2 - a^2)}$$





$$x_i = a + i\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$k \geq 0: \quad N_n = \sum_{i=0}^{n-1} k x_i \cdot \Delta x$$

$$= k \sum_{i=0}^{n-1} (a + i\Delta x) \cdot \Delta x$$

$$= k\left(a \cdot n + \frac{n(n-1)}{2}\Delta x\right)\Delta x$$

$$= k(b-a)\left(a + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} N_n = k(b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right) = \frac{k}{2}(b-a)(b+a)$$

$$= \frac{k}{2}(b^2 - a^2).$$

$$\Phi_n - N_n = \sum_{i=1}^{n} k x_i \Delta x - \sum_{i=0}^{n-1} k x_i \Delta x$$

$$= k\Delta x(b-a) = \underline{\frac{k}{n}(b-a)^2}$$

så $\lim_{n\to\infty} N_n = \lim_{n\to\infty} \Phi_n = \underline{\frac{k}{2}(b^2 - a^2)}$

(Hvis $k < 0$ byttes N_n og Φ_n om.)

($\Phi_n = \sum_{i=1}^{n} k x_i \Delta x$ og $N_n = \sum_{i=0}^{n-1} k x_i \Delta x$)

15D Ubestemte integraler.

$\int f(x)\,dx$ = samlingen av alle antideriverte til $f(x)$.

$F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$

hvis $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$.

x^2 er en antiderivert til $2x$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^2 - 3)' = (x^2)' - (3)' = 2x.$$

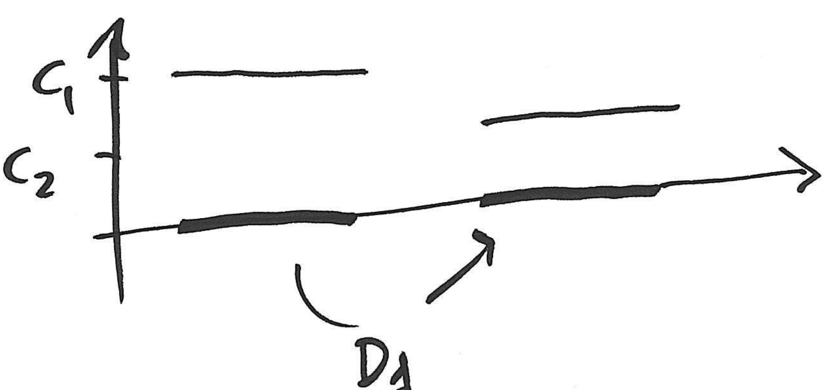
$x^2 - 3$ er også en antiderivert til $2x$.

–

$F(x)$ og $G(x)$ antideriverte til $f(x)$

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x)$$
$$= f(x) - f(x) \equiv 0$$

(for alle x i def. mengden)



$F(x) - G(x)$ er konstant på hver komponent av def. mengden.

Alle antideriverte til $2x$ er på forma $x^2 + c$ c er en konstant.

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

$$x \neq 0$$

$$(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

$$\left(x<0 : \frac{d}{dx}\ln(\underbrace{-x}_{u}) \overset{\text{kjerne}}{=} \frac{d\ln u}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{d(-x)}{dx} = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \right)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

(vi kan velge forskjellige konstanter for $x<0$ og for $x>0$)

$$\int x^r dx = \underline{\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c}$$

$$(x^{r+1})' = (r+1)x^{r+1-1} = (r+1)x^r$$

$$\left(\frac{1}{r+1}\cdot x^{r+1}\right)' = x^r \qquad r \neq -1$$

$$\int x^r\,dx = \begin{cases} \ln|x| + c & r = -1 \\ \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c & r \neq -1. \end{cases}$$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-1} + c$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + c = \underline{\frac{-1}{x} + c}$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\,dx$$

$$= \frac{x^{1/3+1}}{4/3} + c = \underline{\frac{3x^{4/3}}{4} + c}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$$

$$= \int \left(x^{1/2}\right)^{-1}dx = \int x^{-1/2}\,dx$$

$$= \frac{x^{-1/2+1}}{1/2} + c = 2x^{1/2} + c$$

$$= \underline{2\sqrt{x} + c}$$

(test: $(2\sqrt{x})' = 2(x^{1/2})' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{1/2-1}$
$= x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}$ ✓)

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$
$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$
$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

Fundamentalteoremet i kalkulus.

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ er en antiderivert til $f(x)$, hvis $f(x)$ er kontinuerlig.

* så alle kontinuerlige funksjoner har en antiderivert.

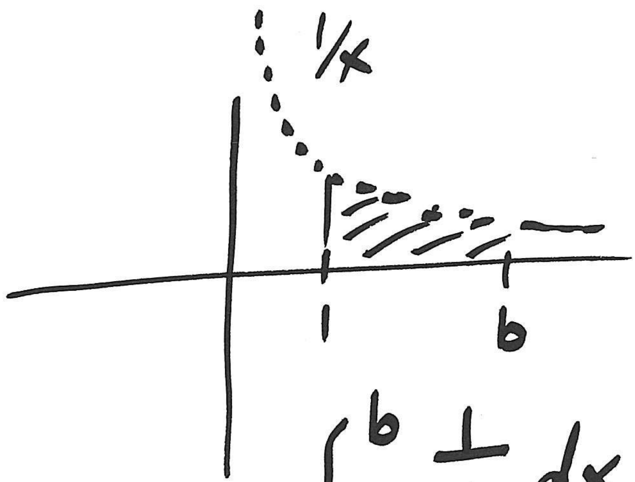
Hvis $G(x)$ er en antiderivert til $f(x)$
så er $G(x) + C = \int_a^x f(x)\,dx$.

* $x = a$ gir
$G(a) + C = \int_a^a f(x)\,dx = 0$
så $C = -G(a)$

* $x = b$
$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$
$$= G(x) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b 2x\,dx = x^2\Big|_a^b$$
$$= b^2 - a^2$$

generelt $$\int_a^b kx\,dx = \frac{k}{2}x^2\Big|_a^b$$
$$= \underline{\frac{k}{2}(b^2-a^2)}$$



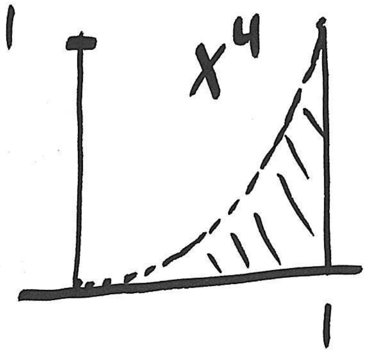
$b > 1$

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \ln|x|\Big|_1^b = \ln b - \overbrace{\ln(1)}^{0}$$

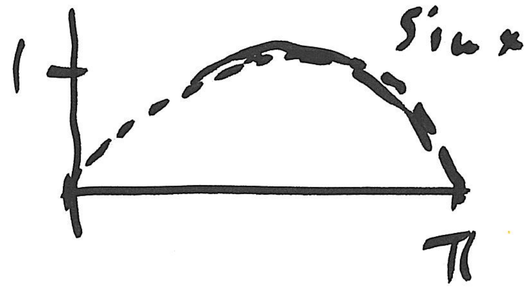
$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \underline{\ln b}$$

—

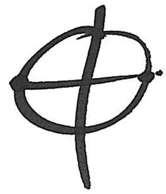


$$\int_0^1 x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \underline{\frac{1}{5}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$



$$= -\cos x \Big|_0^{\pi}$$

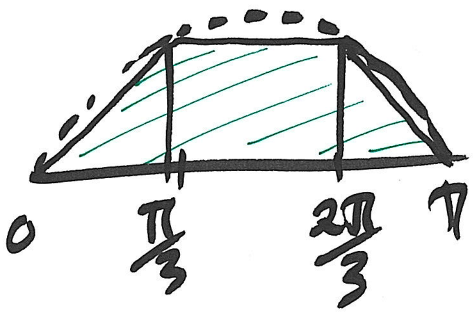


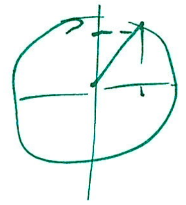
$$= -\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - (-\underbrace{\cos 0}_{1})$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$$\underline{\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2}$$

Estimera integralet





Estimat: $\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2} + \sin\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2}\right)$

$$= \frac{\pi}{3}\left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}\left(2 \cdot \underbrace{\sin(60^\circ)}_{\sqrt{3}/2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sim \underline{1.81}$$