24.03
26

14D Vendelige rekker

Følger $a_1, a_2, a_3, \ldots$ konvergerer
til (en grense) g hvis

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

eks $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ konvergerer følgen?

$$= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

Følgen konvergerer til 0.

Rekker

$$\overbrace{\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}_{S_n \text{ n-te delsum.}} + \cdots}^{\text{vendelig rekke.}}$$

Rekken konvergerer og har sum S hvis

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

($\Leftrightarrow$ følgen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ konvergerer til s)

Ellers sier vi at rekken divergerer (har ingen sum).

Uendelig geometrisk rekke

$$1+k+k^2+k^3+\cdots = \frac{1}{1-k}$$

når $|k|<1$

divergerer når $|k| \geq 1$.

Dette følger fordi

$$1+k+k^2+\cdots+k^{n-1} = \begin{cases} \frac{k^n-1}{k-1} & k \neq 1 \\ n & k \text{ lik } 1. \end{cases}$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots + \frac{1}{3^n}+\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{3-1} = 3/2 = \underline{1.5}$$

Kan $1+k+k^2+\cdots$ bli lik et negativt tall?

Nei, det er ikke mulig. summen er $\frac{1}{1-k} > 0$ når $|k|<1$

FORK1120 - Matematikk forkurs Oslomet
Test
Tirsdag 24. mars 2026

Oppgave 1. Finn summen av de 49 første positive tallene som er delelige med 7.

Oppgave 2. Hva er ledd nummer 5 når $a_1 = 0$ og vi har følgende rekursive beskrivelse av følgen

$$a_{n+1} = -2a_n + 1$$

Oppgave 3. Forklar hvorfor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

hvis rekken

$$a_1 + a_2 + a_3 \cdots$$

konvergerer.

FORK1120 - Matematikk forkurs Oslomet
Test
Tirsdag 24. mars 2026

Oppgave 1. Finn summen av de 49 første positive tallene som er delelige med 7.

$7+14+21+28+\cdots+7\cdot 49$

$=7(1+2+3+\cdots+49) \quad = 7\cdot\frac{49(49+1)}{2}$

$=7\cdot 49\cdot 25 = \underline{8575}$

Alternativt

$\frac{a_1+a_{49}}{2}\cdot \underset{\#\text{ledd}}{49} = \frac{7(1+49)}{2}\cdot 49 = \underline{8575}$

Oppgave 2. Hva er ledd nummer 5 når $a_1 = 0$ og vi har følgende rekursive beskrivelse av følgen

$$a_{n+1} = -2a_n + 1$$

$a_2 = -2a_1 + 1$ setter inn $a_1 = 0$

$a_2 = 1$

$a_3 = -2a_2 + 1 = -2 + 1 = -1$

$a_4 = -2(-1) + 1 = 3$

Det femte leddet: $a_5 = -2(3) + 1 = \underline{-5}$

Oppgave 3. Forklar hvorfor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

hvis rekken

$$a_1 + a_2 + a_3 \cdots$$

konvergerer.

n-te delsum $S_n = a_1 + \cdots + a_n$.

Rekken konvergerer: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1}$

$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = \underline{0}$

Selv om $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

så behøver ikke $a_1+a_2+a_3+\cdots$ konvergere.

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ når $n\to\infty$

$S_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ (n ledd)

$\geq$ (minste ledd) $\cdot$ (# ledd)

$\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot n = \sqrt{n}$ (siden $\frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$)

$S_n \geq \sqrt{n}$.

Så $S_n \to \infty$ når $n\to\infty$.

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergerer.

---

men $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ når $n\to\infty$.

Resultat $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$

konvergerer når $s>1$

divergerer når $s\leq 1$.

$s=1/2$ eks. ovenfor.

$s=1$ harmonisk rekke. synte i går at den divergerer.

Uendelig geom rekke eks.

$$k + k^2 + k^3 + \cdots = a$$

For hvilke a finnes det en k slik at summen er lik a? Hva må k være?

$$k + k^2 + k^3 + \cdots = k(\underbrace{1 + k + k^2 + \cdots}_{\frac{1}{1-k}}) \qquad |k| < 1.$$

$$a = \frac{k}{1-k} \qquad \text{med } |k| < 1.$$

Løser for k:

$$(1-k)\cdot a = k$$

$$a = k + ka = k(1+a)$$

$$\underline{k = \frac{a}{1+a}} \qquad a \neq -1.$$

$|k| < 1$

så $\left|\frac{a}{1+a}\right| < 1.$

ingen løsning $a \leq -1.$

$\underline{a > 0}$

$\cancel{[0,1]}$ $\langle -1, 0]$:

$a < 0$

$1 + a > 0$

$$\frac{-a}{1+a} < 1 \qquad 1 + a > 0$$

$$-a < 1 + a$$

$$-1 < 2a$$

$$-\frac{1}{2} < a$$

Løsningen for $\underline{a > -1/2}$.

Variabel kvotient

$$\frac{3x}{2} + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x}{2}\right)^n$$

uendelig geometrisk rekke med $k = \frac{3x}{2}$.

konvergerer når $\left|\frac{3x}{2}\right| < 1$

$$\Longleftrightarrow \quad |x| < \frac{2}{3}.$$

Rekken er da lik (konvergerer til)

$$\frac{3x}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3x}{2}} = \underline{\frac{3x}{2 - 3x}} \quad \text{når } |x| < \frac{2}{3}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots$$

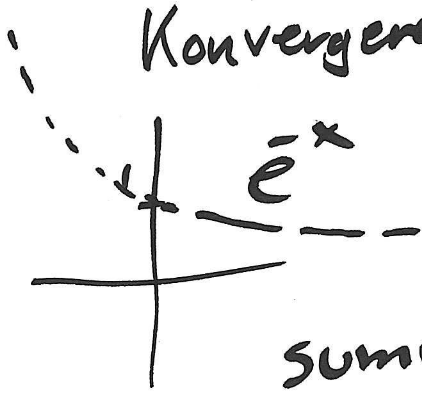
$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n$$

geometrisk rekke med kvotient e^{-x}.

Konvergerer når $|e^{-x}| < 1$

$$\Longleftrightarrow e^{-x} < 1$$

$$\Longleftrightarrow \underline{x > 0}$$



summen er

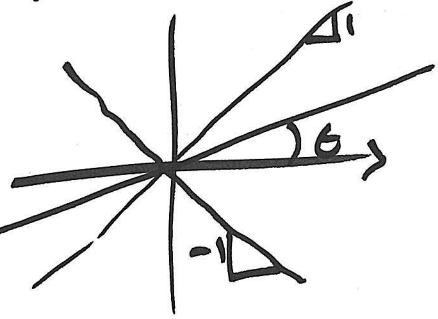
$$1 \cdot \frac{1}{1 - e^{-x}} = \underline{\frac{e^x}{e^x - 1}} \qquad x > 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tan x)^n \qquad x \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle$$

Når konvergerer rekken, og hva er da summen?

Geometrisk rekke med kvotient $\tan x$. Konvergerer når

$$|\tan x| < 1$$



$\tan \theta$ er stigningstallet

Løsningen til $|\tan x| < 1$ er $\underline{\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle}$

summen er $\tan x \cdot \dfrac{1}{1-\tan x}$

$$= \underline{\frac{\tan x}{1-\tan x} \quad \text{for } x \in \langle -\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4} \rangle}$$

Potensrekker

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

$a_i = 1$ for alle i

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{når } |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

hvor $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ — n fakultet

$0! = 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{for passende } x.$$

Merknad $\frac{d^n}{dx^n} x^n = n!$

(De har samme n-te derivert i $x=0$ for $n \geq 0$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$