23 mars
26

Fibonacci tall, rekursive tallfølger.

Det gylne snitt (forhold)

$$\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{L}\big|\underbrace{\qquad\quad}_{K}}^{1}$$

Dele opp slik at $\dfrac{1}{L} = \dfrac{L}{K}$ $\qquad K = 1 - L$

$$\frac{1}{L} = \frac{L}{1-L} \qquad \text{likning i } L.$$

$$\Updownarrow$$

$L \neq 0,1$ så $\qquad 1 - L = L^2 \iff L^2 + L - 1 = 0$

$$L = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1(-1)}}{2} = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2}$$

Løsningene:

$$L = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2} \sim -1{,}618\ldots \quad < 0$$

og

$$\frac{+\sqrt{5} - 1}{2} \sim 0.618\ldots \quad > 0$$

Det gylne snitt $\varphi = \dfrac{1}{(\sqrt{5}-1)/2} \dfrac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)}$ $\left(\dfrac{1}{L} \text{ hva } \atop L>0 \right)$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$$

$$1/\varphi = 0{,}618\ldots$$

φ er et irrasjonalt tall som er lengst mulig unna å være et rasjonalt tall.

(sjekk gjerne "golden ratio" på nettet)

Fibonacci tallene

$F_0, F_1, F_2, \ldots$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

Rekursiv beskrivelse

$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

Vi skal finne en formel for F_n.

Finner først geometriske følger som oppfyller den rekursive beskrivelsen

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$$

$$x_n = k^n \qquad k^{n+2} = k^n + k^{n+1}$$

$k = 0$

La oss nå anta $k \neq 0$. Deler med k^n:

$$k^2 = k + 1.$$

$$k^2 - k - 1 = 0$$

$$(-k)^2 + (-k) - 1 = 0$$

så $-k = L$ oppfylle $L^2 + L - 1 = 0$

$$-k = L = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2}, \quad k = \frac{\pm\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sim 1{,}618$$

$$k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \sim -0{,}618$$

$X_n = a k_1^n + b k_2^n$ oppfyller også den rekursive betingelsen $X_{n+2} = X_n + X_{n+1}$

$$X_{n+2} - X_{n+1} - X_n = 0$$

$$a k_1^{n+2} + b k_2^{n+2} - (a k_1^{n+1} + b k_2^{n+1}) - (a k_1^n + b k_2^n) = 0$$

$$a(\underbrace{k_1^{n+2} - k_1^{n+1} - k_1^n}_{0}) + b(\underbrace{k_2^{n+2} + k_2^{n+1} + k_2^n}_{0}) = 0$$

Finner a og b s.a $x_0 = 0$ $x_1 = 1$, for da vil $X_n = F_n$

$$X_0 = a k_1^0 + b k_2^0 = a + b = 0 \qquad a = -b$$

$$X_1 = a \cdot k_1 + b k_2 = a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

benytter at $b = -a$

$$= a\,\frac{\sqrt{5}+1}{2} - a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$= a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + a\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$a\sqrt{5} = 1$$

så $\underline{a = \frac{1}{\sqrt{5}}}$

$$\underline{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)} \qquad n \geq 0$$

tester med $n=2$: $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^2}{2^2}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1. \quad \checkmark$$

Vi kan finne tilsvarende formler for x_n med vilkårlige x_0, x_1 som oppfylle $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$.

$$x_n = a\varphi^n + b\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n$$

Eks

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 4$$

Løsning: $x_n =$

$$\overbrace{\frac{2\varphi - 4}{\varphi + 1/\varphi}}^{b}\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n + \underbrace{\frac{2/\varphi + 4}{\varphi + 1/\varphi}}_{a}\varphi^n$$

$$x_0 = a + b = 2$$

$$x_1 = a\varphi + b\left(\frac{-1}{\varphi}\right) = 4$$

To lineære likninger to ukjente.

$$\varphi x_0 = \varphi a + \varphi b$$

$$x_1 = a\varphi + b\left(\frac{-1}{\varphi}\right)$$

$$(\varphi x_0 - x_1) = \varphi b + \frac{1}{\varphi}b = \left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)b$$

$$b = \frac{\varphi x_0 - x_1}{\varphi + \frac{1}{\varphi}}$$

$$a = \frac{x_0/\varphi + x_1}{\varphi + 1/\varphi}$$

$$a = x_0 - b = \frac{\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)x_0 - \varphi x_0 + x_1}{\varphi + \frac{1}{\varphi}}$$

Sum av Fibonacci tall.

$F_0=0,\ F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8$
$F_7=13,\ F_8=21$

$S_n = F_0 + \cdots + F_n$

Er $S_n = F_{n+2} - 1$ for alle n?
(sjekket opp til $n=6$).

$S_0 = 0 = F_2 - 1$
$S_1 = 1 = F_3 - 1$
$S_2 = 2 = F_4 - 1$
$S_3 = 4 = F_5 - 1$
$S_4 = 7 = F_6 - 1$
$S_5 = 12 = F_7 - 1$
$S_6 = 20 = F_8 - 1$

Sant for $n=0$
Benytter matematisk induksjon.
Antar formelen er sann for n, og viser at da må den også være sann for $n+1$.

sann for $n=0$ $\Rightarrow$ sann for $n=1$ $\Rightarrow$
sann for $n=2$ $\Rightarrow$ etc.
så sann for alle n.

Vi antar

$$S_n = F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

$$S_{n+1} = \underbrace{F_0 + F_1 + \cdots + F_n}_{F_{n+2}-1} + F_{n+1} = \underbrace{F_{n+1} + F_{n+2}}_{F_{n+3}} - 1$$

ved vår antakelse

Vi har da vist at $S_{n+1} = F_{(n+1)+2} - 1$

Så formelen er sann for $n+1$ hvis den er sann for n.

Vi har vist at $\underline{S_n = F_0 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1}$

$n \geq 0$

Kombinasjon av geometriske og aritmetiske følger

$a_{n+1} = k a_n + d$

$k=1$ aritmetisk følge

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$d=0$ geometrisk følge

$a_n = k^{n-1} a_1$

Finner en formel for a_n.

$a_n = x_n + b$ setter inn

antar $k \neq 1$

$x_{n+1} + b = k(x_n + b) + d$

$x_{n+1} = k x_n \underbrace{- b + kb + d}_{\text{Velger } b \text{ s.a dette blir } 0.}$

Da blir $x_{n+1} = k x_n$, så $x_n = k^{n-1} \cdot x_1$

$b(k-1) + d = 0$

$b = \frac{-d}{k-1}.$

$a_n = k^{n-1}(\overbrace{a_1 - b}^{x_1}) + \frac{-d}{k-1}$

$a_n = \underline{k^{n-1} a_1 + \frac{d}{k-1}(k^{n-1} - 1)}$

Harmonisk rekke

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Divergerer (summen eksisterer ikke)

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

$S_{10} \sim 2.93$ $\quad S_{100} \sim 5.19$ $\quad S_{1000} \sim 7.49$

$S_{10000} \sim 9{,}79$ $\quad S_{100000} \sim 12{,}09$ $\quad S_{1000000} \sim 14.39\ldots$

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}=1/2}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}=1/2}+\underbrace{\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}}_{\geq 8\cdot\frac{1}{16}=1/2}+\cdots$$

$$\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}} \geq \underbrace{2^n}_{\text{antall ledd}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{minste ledd}} = \frac{1}{2}.$$

$$S_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1)$$

$$S_n = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\leq \frac{1}{2} \cdot 2 = 1} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{\leq \frac{1}{4} \cdot 4 = 1} + \frac{1}{8} + \cdots \quad \frac{1}{n}$$

$$S_{2^n - 1} \leq 1 + (n-1) \quad \text{så} \quad S_{2^n} \leq 1 + (n-1) + \frac{1}{2^n}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \leq S_{2^n} \leq 1 + (n-1) + \frac{1}{2^n}$$

Dette viser at

$S_m \to \infty$ når $m \to \infty$,

så den harmoniske rekken divergerer.