18 mars 26

14C Aritmetiske følger og rekker

Aritmetisk følge $\qquad a_{n+1} = a_n + \underset{\uparrow}{d} \iff a_{n+1} - a_n = d$

differansen

Eks:

$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$ positive partall $\quad d = 2$

$1, 3, 5, 7, \ldots$ positive oddetall $\quad d = 2$

$-7, -4, -1, 2, 5, \ldots \quad d = 3$

$11, 7, 3, 0, -4, -8, \ldots \quad d = -4$

$1, 1, 1, 1, \ldots \quad d = 0$

$$\underline{a_1 + (n-1)d = a_n}$$

$n = 1$ ✓ $\quad a_1 + 0 \cdot d = a_1$

$$a_{n+1} - a_n = (a_1 + nd) - (a_1 + (n-1)d) = d$$

Tilsvarende $\qquad \underline{a_n = a_m + (n-m)d}$

$n \neq m \qquad d = \dfrac{a_n - a_m}{n - m}$

En aritmetisk følge er bestemt av to av leddene

Eks

$a_1, a_2 \ldots$ aritmetisk følge

$a_4 = 6$ og $a_8 = 20$

Finn en formel for a_n.

$$d = \frac{a_8 - a_4}{8 - 4} = \frac{20 - 6}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$a_n = a_4 + (n-4) \cdot \frac{7}{2} = 6 + (n-4)\frac{7}{2}$$

$$a_n = 6 - 4 \cdot \frac{7}{2} + \frac{7}{2} n = \underline{-8 + \frac{7}{2} n}$$

Eks.

Aritmetisk følge $b_1, b_2, b_3, \ldots$

Kjenner $b_5 = 13 \qquad b_{11} = 1$

Finn b_n, $n \geq 1$

→

$$b_{11} = b_5 + (11-5)d$$

$$b_{11} - b_5 = (11-5)d$$

$$d = \frac{b_{11}-b_5}{11-5} = \frac{1-13}{6} = \frac{-12}{6} = -2.$$

$$b_n = b_5 + (-2)(n-5) = 13 + (-2)(n-5)$$

$$= 13+10-2n$$

$$\underline{b_n = 23 - 2n}$$

Aritmetiske rekker $\quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad$ endelig.

Den eneste aritmetiske rekken som konvergerer er $\quad 0+0+0+0+\cdots$

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Resultat:

$n=1$:	1	$\frac{1\cdot 2}{2} = 1$	✓
$n=2$:	$1+2=3$	$\frac{2\cdot 3}{2} = 3$	✓
$n=3$:	$1+2+3 = 6$	$\frac{3\cdot 4}{2} = 3\cdot 2 = 6$	✓
$n=4$:	$1+2+3+4 = 10$	$4\cdot 5/2 = 2\cdot 5 = 10$	✓

$$S_n = 1+2+3+\cdots+n$$

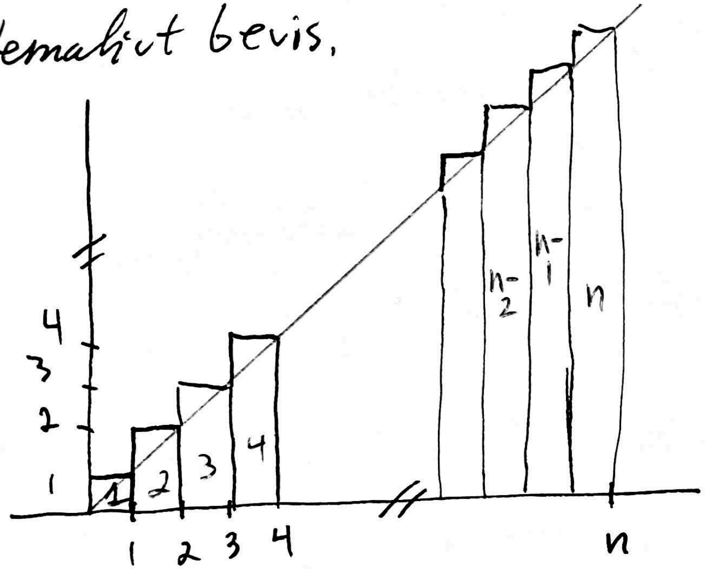
$$2S_n = S_n + S_n = \begin{array}{l} 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n \\ n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1 \\ \hline \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ ledd}} \end{array}$$

$$2S_n = (n+1)\cdot n$$

så $\underline{S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$

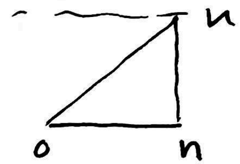
$$1+2+3+\cdots+100 = \frac{100(101)}{2} = 50\cdot(101) = 5000+50 = \underline{5050}$$

Alternativt bevis.

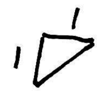


Arealet er lik

$1+2+3+\cdots+n = S_n$



= areal til stor trekant

$+ n \cdot$ 

$= \frac{n \cdot n}{2} + n \cdot \frac{1 \cdot 1}{2}$

$S_n = \frac{1}{2}(\underbrace{n \cdot n + n}_{n(n+1)}) = \underline{\frac{1}{2} n(n+1)}$

Eks — Finn summen av de første n oddetallene:

$1+3+5+\cdots+\underbrace{(2n-1)}_{n\text{-te ledd.}} = (2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1)+\cdots+(2n-1)$

$= 2(1+2+3+\cdots+n) + (-1)\cdot n = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n$

$= n(n+1) - n = n^2+n-n$

$= \underline{\underline{n^2}}$

$$S = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = \frac{a_n + a_m}{2} \cdot \underbrace{(n-m+1)}_{\text{antall ledd.}}$$

Vi viser formelen.

$$a_k = a_m + (k-m)d$$

$$S = a_m + (a_m + d) + (a_m + 2d) + \cdots + (a_m + (n-m)d)$$

$$= \underset{\substack{\text{antall}\\ \text{ledd}}}{a_m (n-m+1)} + \Big(\underbrace{1+2+3+\cdots+(n-m)}_{\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}}\Big)d \quad \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} \cdot d$$

$$S = \left(a_m + \frac{n-m}{2} d\right)(n-m+1) = \left(\frac{a_m + \overbrace{a_m + (n-m)d}^{a_n}}{2}\right)(n-m+1)$$

$$= \frac{a_m + a_n}{2}(n-m+1)$$

Eks

$$\underset{n \text{ første positive oddetall}}{1 + 3 + \cdots + (2n-1)} = \frac{(1 + (2n-1))}{2} \cdot \overset{\text{antall ledd}}{n} = \frac{2n}{2} \cdot n$$

$$= n^2$$

$S = 7 + 10 + 13 + \cdots + 124$

Hva er summen til denne aritmetiske rekken?

Hvor mange ledd er det i rekken?

$7 = a_1 \quad \ldots \quad 124 = a_n$

antall ledd er n.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$d = 10 - 7 = 3.$

$124 = 7 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 7 - 3 = 3n + 4$

$124 - 4 = 120 = 3n$ og $n = 120/3 = \underline{40}$

$S = \dfrac{7 + 124}{2} \cdot \underset{\text{antall ledd}}{40} = 20 \cdot 131 = \underline{2620}$

Finn summen av alle positive heltall delelige med 3 som er mindre enn eller 1000.

$\underset{a_1}{3} + \underset{a_2}{6} + \underset{a_3}{9} + \cdots + \underset{a_n}{999}$, $a_n = 3n$

aritmetisk følge med diff $d = 3$ og $a_1 = 3$.

Antall ledd: 333

siste leddet $3n = 999$

$n = \underline{333}$

$$\frac{3+999}{2} \cdot 333 = \frac{1002}{2} \cdot 3 \cdot 111$$

$$= 501 \cdot 3 \cdot 111$$

$$= 333 + 100 \cdot \underbrace{5 \cdot 333}$$

$$\begin{array}{r} 1500 \\ +150 \\ +\ 15 \end{array} = 1665$$

$$= \begin{array}{r} 166500 \\ +\ 333 \end{array} = \underline{166833}$$

Opp. Finn summen av alle positive heltall delelige med 7 og mindre enn eller lik 7.

$7 + 14 + 21 + \cdots + 994$

$7(1+2+\cdots+142)$

$= 7 \dfrac{142 \cdot 143}{2} = \underline{71071}$

$= 7 \cdot (71) \cdot 143$

700   280 + 14

$100 \cdot 7$ $40 \cdot 7$ $2 \cdot 7$

$142 \cdot 7$

Finn summen av alle positive heltall som er delelige med 3 eller 7 (eller begge) og som er mindre eller lik 1000.

$$3, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18, 21, 24, \ldots, 999$$

delelig både med 3 og 7
dv.s delelig med 21.

Summen S = (summen av tall $n \le 1000$ delelig med 3)
+ (—"— $n \le 1000$ delelig med 7)
− (—"— delelig med $3 \cdot 7$)

aritmetisk følger.

summen

$$21 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 21 + \cdots \overbrace{47 \cdot 21}^{987}$$

$$= 21(1 + 2 + \cdots + 47) = 21 \cdot \frac{47 \cdot (47+1)}{2}$$

$$= 21 \cdot \frac{47 \cdot 48}{2} = 21 \cdot 47 \cdot 24 = 23688$$

$21 \cdot 40 = 840$

$21 \cdot 7 = 147$

$21(47) = 987$

svaret blir $166833 + 71071 - 23688 = \underline{214\,216}$

9119.

Aritmetisk følge av partallene ≥ 0

$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

Hvor mange ledd må vi ha med for at summen skal bli nærmest 10000? Hva blir denne summen?

$$S_n = \underbrace{2+4+6+8+\cdots+(2n)}_{n \text{ første pos. partallene}} = 2(1+2+\cdots+n)$$

$a_k = 2k$

$$= 2\,\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

$$S_n = \underline{n^2+n}$$

Vi ønsker å finne n s.a. n^2+n er nærmest $10\,000$.

$n^2 \gg n$. $n^2 \sim 10\,000$

$n = 100$.

$S_{100} = 100^2 + 100 = 10\,000 + 100 = 10100 > 10\,000$

$S_{99} = 99(99+1) = 9900 < 10\,000$

Vi kommer nærmest 10 000 med både 99 og 100 ledd.

Summene er henholdsvis 9900 og 10100.

14.32. a) $23+24+\dots+184$ (aritmetisk)

$$= \sum_{i=23}^{184} i = \sum_{k=1}^{162} (22+k)$$

$184 = 22+n$

$n = 184-22 = 162$

Rekken har 162 ledd.

Summen er lik: $\frac{23+184}{2} \cdot 162$

$207 \cdot 81 = 207 + 80 \cdot 200 + 80 \cdot 7$

$= 16000 + 560 + 207$

$= \underline{16767}$

b) $8 + 16 + 32 + \dots + 512$ går utifra at rekken er geometrisk

$2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^9$

$= \sum_{i=3}^{9} 2^i \dots = 8 \sum_{i=0}^{6} 2^i \dots$

$\uparrow$ første ledd

$2^3(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6)$

Hvilke følger er både aritmetiske og geometriske?

Ett ledd $\quad a_1 \quad$ alle er både geometriske og aritmetiske

To ledd $\quad a_1, a_2 \quad$ $d = a_2 - a_1$

$a_2 = k \cdot a_1$

Alle slike er aritmetiske, og alle slike med $a_1 \neq 0$ eller både a_1 og a_2 lik 0 er geometriske.

($0, a_2$, med $a_2 \neq 0$ er ikke geometriske)

Tre ledd $\quad a_1, a_2, a_3 \quad$ antar $a_1 \neq 0$

Hvis følgen er både geometrisk og aritmetisk da må

$a_2 = ka_1 \qquad a_3 = k^2 a_1$ geometrisk

$a_2 = a_1 + d \qquad a_3 = a_1 + 2d$ aritmetisk

$ka_1 = a_1 + d$ og $k^2 a_1 = a_1 + 2d$

så $(k-1)a_1 = d$ og $(k^2-1)a_1 = 2d$

$\Rightarrow 2d = 2(k-1)a_1 = (k^2-1)a_1$

siden $a_1 \neq 0$ så må

$$2(k-1) = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$$

$$\Leftrightarrow (k-1)(k+1) - 2(k-1) = (k-1)^2 = 0$$

Derfor må $k = 1$ og dermed $d = 0$.

Vi konkluderer med at følger med minst tre ledd er både geometriske og aritmetiske hvis og bare hvis følgen er konstant (alle leddene er like).