17.03 14C (D) Geometriske følger og rekker.
26

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ følger

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ rekker

Geometriske følger

$a_{n+1} = k \cdot a_n$ alle gyldige n.

$\uparrow$ kvotienten (til den geometriske følgen)

$3, 0, 0, \ldots$ $k = 0$

$0, 0, \ldots$ 0 alle k

$1, k, k^2, k^3, k^4, \ldots$ k

$a_1 = 3$, $k = -2$: $3, -6, 12, -24, 48, -96, \ldots$

Geometrisk følge $\underline{a_n = a_1 \cdot k^{n-1}}$

$$\frac{a_n}{a_m} = k^{n-m}$$

$$\underline{a_n = a_m \cdot k^{n-m}}$$

<u>Eks</u> Geometrisk følge $a_5 = 16$ og $a_2 = -2$.

Hva må a_n være?

$$a_5/a_2 = \frac{16}{-2} = -8 = k^{5-2} = k^3$$

så $k = -2$

$$a_1 = \frac{a_2}{k} = \frac{-2}{-2} = 1 .$$

$1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots$

$$a_n = a_2 k^{n-2} = (-2)(-2)^{n-2} = (-2)^{n-1}$$

* $a_7 = 10 \quad , a_5 = 5$

Finn a_n i de geometriske følgene med disse egenskapene.

$$\frac{a_7}{a_5} = k^2 = \frac{10}{5} = 2$$

To løsninger: $k_1 = \sqrt{2}$ og $k_2 = -\sqrt{2}$.

$$a_n = a_5 k^{n-5}$$

1) $a_n = 5(\sqrt{2})^{n-5} = 5(\sqrt{2})^{n-1}(\sqrt{2})^{-4} = \frac{5}{4}(\sqrt{2})^{n-1}$

$\frac{5}{4}(1), \frac{5}{4}\sqrt{2}, \frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}, 5, 5\sqrt{2}, 10, \ldots$

2) Tilsvarende:

$a_n = 5(-\sqrt{2})^{n-5} = \frac{5}{4}(-\sqrt{2})^{n-1}$

* $a_5 = 5$ og $a_7 = -10$

Det finnes ikke en geometrisk følge (med reelle tall) som oppfyller dette

$$\frac{a_7}{a_5} = \frac{-10}{5} = \underline{-2} = k^{7-5} = \underline{k^2}$$

$k^2 = -2$ har ingen reelle løsninger.

oppg. Geometrisk følge med

$a_1 = 0.5 \qquad a_3 = 0.125.$

Hva er a_8?

$a_3 = k^2 \cdot a_1 \qquad a_3/a_1 = k^{3-1} = k^2$

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{0.125}{0.5} = \underline{\frac{1}{4} = k^2}.$$

så $\underline{k = \pm\frac{1}{2}}.$

$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

$a_8 = a_1 \cdot k^{8-1} = a_1 \cdot k^7$

To muligheter: $k = \frac{1}{2}$: $a_8 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$= \frac{1}{2^8} = \underline{\underline{\frac{1}{256}}}$

$k = -\frac{1}{2}$: $a_8 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^7$

$= \underline{\underline{\frac{-1}{256}}}$

Geometriske rekker

$$a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + a_1 k^3 + \dots + a_n k^{n-1}$$

$$= a_1 (1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1})$$

Resultat

$$= \begin{cases} a_1 \dfrac{k^n - 1}{k-1} & k \neq 1 \\ a_1 \cdot n & k = 1 \end{cases}$$

$$S_n = 1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}$$

tester: $n = 1$: $\dfrac{k^1 - 1}{k-1} = 1 = S_1$ ✓

$n = 2$: $\dfrac{k^2 - 1}{k-1} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k-1}$

$= k+1 = 1+k = S_2$ ✓

$$S_n (k-1) = S_n \cdot k - S_n$$

$$= k + k^2 + k^3 + \dots + k^n$$

$$-(1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^{n-1})$$

$$= k^n - 1$$

$k \neq 1$

deler med $k-1$ og får:

$$S_n = \frac{k^n - 1}{k-1}$$

$1 + 7 + 49 + \cdots + 7^n$

$$= \frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} = \underline{\frac{1}{6}(7^{n+1} - 1)}$$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1/2}$$

$$= \underline{2(1 - (\tfrac{1}{2})^n)}$$

delsummene nærmer seg 2

når $n \to \infty$.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$

vendelig
geometrisk rekke

$1 + k + k^2 + \cdots = \frac{1}{1-k}$

konvergerer (har sum) $\Leftrightarrow |k| < 1$.

(da vil $\lim_{n \to \infty} \frac{k^n}{1-k} = 0$).

$k = -3$

$$a_1(1 - 3 + 9 - 27 + \cdots (-3)^{m+1})$$

$$1 + k + \cdots + k^{n-1} = \frac{k^n - 1}{k-1}.$$

$n - 1 = m + 1$ så $n = m + 2$

$$a_1 \frac{(-3)^{m+2} - 1}{-3-1} = \frac{-a_1}{4}\left((-3)^{m+2} - 1\right).$$

$$1 + k + \cdots + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k-1} \qquad k \neq 1$$

$$k^2 + \cdots + k^{100}$$
$$= k^2(1 + k + k^2 + \cdots + k^{98})$$
$$= k^2\left(\frac{k^{99} - 1}{k-1}\right)$$

Eks Finn summen av heltallene på formen $2^i 5^j$ $\quad 0 \le i \le 10$, $0 \le j \le 5$.

$6 \cdot 11 = 66$ slike tall.

$$\underbrace{(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10})}_{10+1 \text{ ledd}}\overbrace{(1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5)}^{5+1 \text{ ledd}}$$

produkt av to geometriske rekker.

$$\left(\frac{2^{11}-1}{2-1}\right)\cdot\left(\frac{5^6-1}{5-1}\right)$$

$$= \underline{(2^{11}-1)(5^6-1)/4}$$

$$= \underline{7995582}$$

__Eks__ Hvor mange ledd må vi ha med

$$1 + (1.1) + (1.1)^2 + (1.1)^3 + \cdots + (1.1)^{n-1}$$

skal bli større enn eller lik 1000?

$$S_n = \frac{(1.1)^n - 1}{1.1 - 1} = \underline{10((1.1)^n - 1)}$$

Hva er den minste n s.a.

$$10((1.1)^n - 1) \geq 1000$$

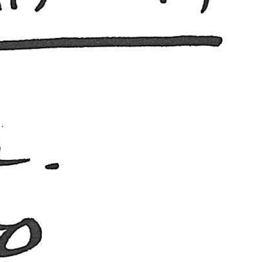
$$\Updownarrow$$

$$(1.1)^n - 1 \geq 100$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{(1.1)^n \geq 101}$$

$(1.1)^n$ voksende funksjon i n.



$(1.1)^n = 101$ anvender Log

$n \operatorname{Log}(1.1) = \operatorname{Log}(101)$ gir $n = \frac{\operatorname{Log}(101)}{\operatorname{Log}(1.1)} = \underline{48.422}$

Vi må ha minst __49 ledd__.