16.03 14A,B Følger og rekker (neste to uker: kap 14)
26

ledd i følgen

Følge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ endelig (tall)-følge

(eng. sequence) $a_1, a_2, \ldots$ (stopper ikke) vendelig (tall)-følge.

Eksempler – $1, 2, 3, \ldots, 137$ endelig følge

$a_n = n$ $n = 1$ til og med 137.

– Mengden $\{1, 2, 3\}$ er ikke følge, det er bare en samling elementer uten rekkefølge.

Følgen av alle positive oddetall ordnet etter størrelse

$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ vendelig følge

formel for n-te element $\underline{a_n = 2n - 1}$

En __aritmetisk følge__ har egenskapen at $a_{n+1} = a_n + d$

$a_{n+1} - a_n = d$ for alle gyldige n differansen

2, 5, 8, 11, 14 aritmetisk følge (med differanse lik 3),

men 10, 7, 5, 4 ikke en aritmetisk følge. $\left.\begin{array}{l} a_2 - a_1 = -3 \\ a_3 - a_2 = -2 \end{array}\right\} \neq$

__Geometrisk følge__ med kvotient k.

$a_{n+1} = k\,a_n$ (hvis $a_n \neq 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$)

1, 0, 0, . . .   geometrisk følge $k = 0$

3, 6, 12, 24, 48   —〃— $k = 2$, $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$4, -2, 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \ldots$ —〃— $k = \frac{-1}{2}$

n-te ledd: $a_n = -8\left(\frac{-1}{2}\right)^n$

- Følgen av primtall ordnet etter størrelse

  $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

  Ingen enkel formel for (prim)tall nummer n.

- a_n = temperaturen ved en gitt målestasjon kl 07^{00} ved dag n.

- <u>Fibonacci</u>-tallene : <u>Rekursiv</u> beskrivelse

  $$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

  $$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

To første tallene,
leddene i følgen er
lik summen av de
to foregående tallene.

Viste noen eksempler i

geogebra (bruk sequence (...))

og python (for-løkker)

Rekker (eng. series)

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + \underset{}{a_n}$ ← ledd   endelig rekke

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ uendelig rekke.

Eks

$1+2+3+4+5$ summen av leddene er 15

$1+2+3+4+5+\cdots$ summen eksisterer ikke.

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \frac{1}{n^2} + \cdots$ rekken konvergerer (har en sum)

summen er $\underline{\frac{\pi^2}{6}}$

En følge gir en rekke

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ gir $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

En rekke $a_1 + a_2 + \cdots$ gir en følge

av <u>delsummer</u> $a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3, \ldots$

$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots$

$s_n = a_1 + \cdots + a_n$ summen eksisterer for alle n

Vi sier at en følge $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ <u>konvergerer</u>

hvis $a_n \to g$ når $n \to \infty$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ følgen konvergerer til 0

$\frac{1}{n} \to 0$ når $n \to \infty$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ følgen konvergerer til 1.

En rekke $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ konvergerer til s (har sum s)

hvis følgen av delsummer konvergerer til s.

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \to s \quad \text{når } n \to \infty.$$

Eksempel

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$$

n-te delsum:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad \text{når } n \to \infty$$

Rekken konvergerer til 1.

Sigma

summenotasjon.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + \cdots + a_n \qquad m \leq n$$

"summen av a_j fra j er lik m til j er lik n."

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \sum_{i=1}^{5} a_{2i-1} = \sum_{l=0}^{4} a_{2l+1}$$

$\Bigg(\sum_{i=m}^{n}$ "summen tar steg på 1" $m, m+1, m+2, \ldots, n \Bigg)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Uendelig rekke

$$\sum_{i=1}^{20} a_i = \sum_{k=1}^{20} a_k$$

$$= \sum_{l=0}^{19} a_{l+1}$$