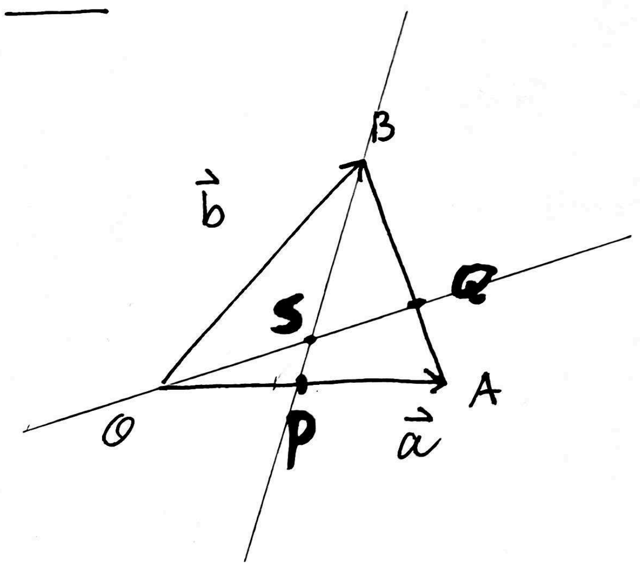
11. mars 26 (oblig oppg 2018 oblig3) $\vec{a}, \vec{b}$ ikke parallelle. De danner en trekant med hjørner O (origo), A og B s.a. $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$

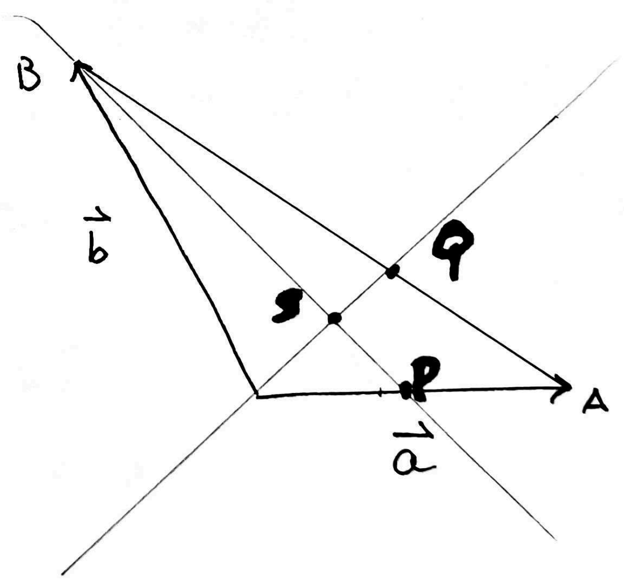
P halveis mellom O og A

Q ligger på linjestykke mellom A og B s.a. $|AQ| = \frac{1}{2}|BQ|$

Linjen gjennom P og B snitter linjen gjennom O og Q i et punkt S.

Uttrykk $\vec{OS}$ som en lineær kombinasjon av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.





$\vec{OP} = \underline{\frac{1}{2}\vec{a}} = \frac{1}{2}\vec{OA}$. $\vec{PB} = \vec{OB} - \vec{OP} = \underline{\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

$\vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AB} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$

$\vec{OQ} = \vec{OA} + \vec{AQ} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \underline{\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}}$.

Parametriserer de to linjene:

Linjen gjennom P og B : $\vec{OP} + k\vec{PB}$ (vektoren fra O til punkt på linjen.)

Linjen gjennom O og Q : $\vec{OO} + l\vec{OQ}$ — 〃 —

Linjene møtes når

$$\vec{OP} + k\vec{PB} = \vec{O} + l\vec{OQ}$$

$$\frac{1}{2}\vec{a} + k(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}) = l(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}) = \vec{OS}$$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ikke parallelle, så $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$ har kun løsning $x = y = 0$

$$(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{k}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}l\vec{a}) + (k\vec{b} - \frac{l}{3}\vec{b}) = 0$$

$$(\frac{1}{2} - \frac{k}{2} - \frac{2}{3}l)\vec{a} + (k - \frac{l}{3})\vec{b} = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{k}{2} - \frac{2}{3}\ell = 0 \qquad \text{og} \qquad k - \frac{\ell}{3} = 0$$

$$\underline{3k = \ell}$$

setter inn $\ell = 3k$ i den første likningen:

$$\frac{1}{2} = \frac{k}{2} + \frac{2}{3}\ell = \frac{k}{2} + \frac{2}{3}(3k) = \frac{k}{2} + 2k$$

$$= +\frac{5}{2}k.$$

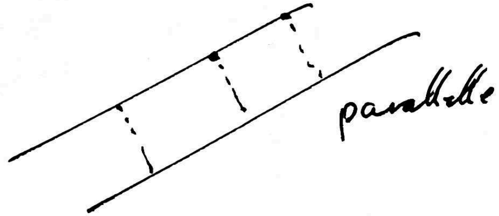
$1 = 5k$ så $k = \frac{1}{5}$

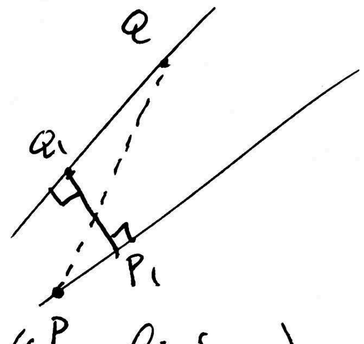
og da $\ell = 3k = \underline{\frac{3}{5}}$

Punktet S er gitt ved $\vec{OS} = \ell\,\vec{OQ} = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)$

$$\underline{\vec{OS} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}}$$

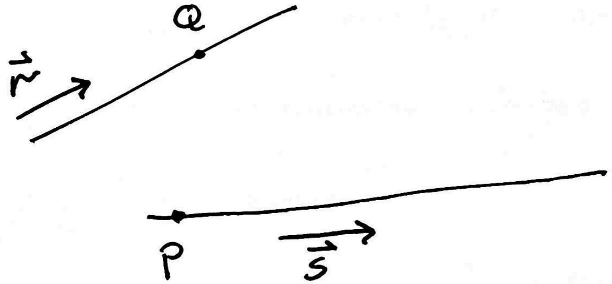
Avstand mellom to linjer.





ikke parallelle.

Den korteste avstanden (mellom to ikke-parallelle linjer) er realisert av et linjestykke som er ortogonalt til begge linjene.



$\vec{n} = \vec{r} \times \vec{s}$ ($\neq \vec{0}$ siden ikkeparallelle) er en vektor vinkelrett på begge linjene.

$\vec{PQ} = x\vec{r} + y\vec{s} +$ vektor ortogonal til linjene og som realiserer korteste vektor mellom linjene

$$\underbrace{\vec{PP_1}}_{y\vec{s}} + \vec{P_1Q_1} + \underbrace{\vec{Q_1Q}}_{x\vec{r}}$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{n} = \underbrace{\vec{PP_1} \cdot \vec{n}}_{0} + \underbrace{\vec{Q_1Q} \cdot \vec{n}}_{0} + \underbrace{\vec{P_1Q_1} \cdot \vec{n}}_{\pm |\vec{P_1Q_1}| \cdot |\vec{n}|}$$

siden parallelle.

Så $\underline{|\vec{P_1Q_1}| = \left| \dfrac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|}$.

Eksempel. Finn korteste avstand mellom linjene

$\ell 1$: gjennom origo og $(-2,3,4)$

$\ell 2$ gjennom $(1,2,-1)$ og $(2,-1,-4)$.

Retningsvektor for $\ell 1$: $\vec{r_1} = [-2,3,4]$

$\ell 2$: $\overrightarrow{(2,-1,-4)\,(1,2,-1)} = [1,2,-1] - [2,-1,-4]$

$\vec{r_2} = [-1,3,3]$.

Finner en normalvektor til begge linjene

$$\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right]$$

$\vec{n} = \vec{r_1} \times \vec{r_2} = [-3, 2, -3]$ $|\vec{n}| = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$.

velger O på linje 1 og (1, 2, −1) på linje 2.

$\vec{PQ} = [1, 2, -1]$.

Korteste avstand mellom linjene

$$\left| \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|[1,2,-1] \cdot [-3,2,-3]|}{\sqrt{22}}$$

$$= \frac{|-3+4+3|}{\sqrt{22}} = \frac{4}{\sqrt{22}} = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{11}} = \underline{\underline{2\sqrt{\frac{2}{11}}}}$$

Eksamen Vår 2024

#7 $A(1,1,0)$ $B(2,4,0)$ og $C(2,2,4)$ hjørner i ΔABC

a) Finn vinkel A i trekanten

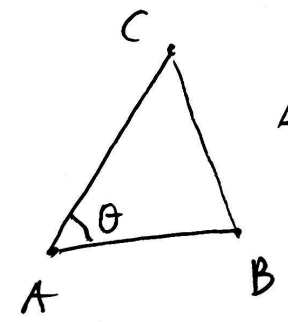
b) Finn arealet til ΔABC

c) Finn en likning og en parameterfremstilling for planet β gjennom A, B og C

d) D ligger på y-aksen. Finn koordinatene til D slik at $\vec{AD} \perp \vec{BC}$.

e) Et punkt E er gitt ved $\vec{AE} = 2\vec{AB} - \vec{BC}$. Finn koordinatene til E.

a) $\cos\theta = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$.



ΔABC

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [2,4,0] - [1,1,0]$
$= [1,3,0]$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [2,2,4] - [1,1,0]$
$= [1,1,4]$.

$\cos\theta = \dfrac{[1,3,0]\cdot[1,1,4]}{\sqrt{1+9}\,\sqrt{1+1+16}} = \dfrac{1+3}{\sqrt{10}\,\sqrt{18}} = \dfrac{4}{3\sqrt{20}} = \dfrac{4}{3\cdot 2\sqrt{5}}$
$= \dfrac{2}{3\sqrt{5}}$

så $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3\sqrt{5}}\right) \sim \underline{72.65^\circ}$.

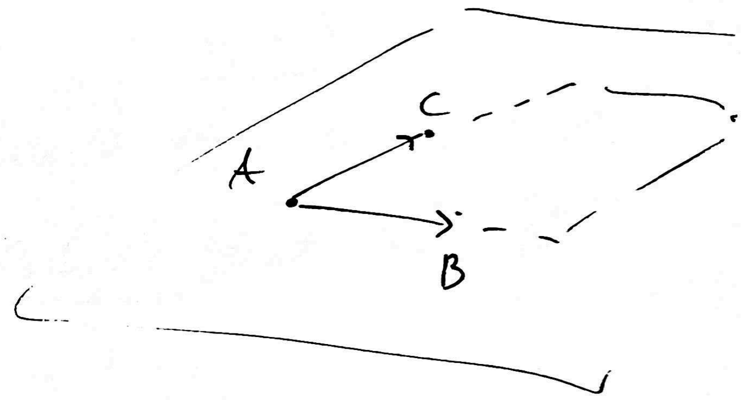
b) $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right]$
$= [12, -4, -2]$
$= \underline{2[6, -2, -1]}$

Arealet til ΔABC $= \frac{1}{2}|\vec{AB}||\vec{AC}|\sin\theta$

$= \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$= \frac{1}{2}\cdot 2|[6,-2,-1]|$

$= \sqrt{36+4+1} = \underline{\sqrt{41}} \sim \underline{6.4}$



c) Parameterfremstilling

$[x,y,z] = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$

$= \underline{[1,1,0] + s[1,3,0] + t[1,1,4]}$ $s,t \in \mathbb{R}$

Likning for planet: $\vec{n} = [6,-2,-1]$ er en normalvektor til planet

$6x - 2y - z = d.$ bestemme d ved å sette inn koordinatene til $A(1,1,0)$

$6-2-0 = d$, $d = 4$

$\underline{6x - 2y - z = 4}$

d) $D(0, y, 0)$

$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = [0, y, 0] - [1, 1, 0]$

$\vec{AD} = [-1, y-1, 0]$.

$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = [2, 2, 4] - [2, 4, 0]$

$\vec{BC} = [0, -2, 4]$.

$\vec{AD} \cdot \vec{BC} = [-1, y-1, 0] \cdot [0, -2, 4] = \underline{-2(y-1)}$

Dette skalarproduktet er lik 0 $\Leftrightarrow$ $y = 1$.

Koordinatene til D må være $\underline{(0, 1, 0)}$ for at $\vec{AD} \perp \vec{BC}$.

e) $\vec{AE} = 2\vec{AB} - \vec{BC}$ Finn koordinatene til E.

$\vec{AB} = [1, 3, 0]$ og $\vec{BC} = [0, -2, 4] = 2[0, -1, 2]$.

$\vec{AE} = 2[1, 3, 0] - 2[0, -1, 2] = 2([1-0, 3-(-1), 0-2])$

$\vec{AE} = \underline{2[1, 4, -2]}$

$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE} = [1, 1, 0] + [2, 8, -4]$

$= [3, 9, -4]$

Koordinatene er $\underline{E(3, 9, -4)}$

Variant av
5c
oblig 6 $\left(\begin{array}{l} \vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} \\ \vec{v} = \vec{a} - 4\vec{b} \end{array} \right)$

c) Bestem alle lineære kombinasjone $\vec{c}$ av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ slik at $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ og $2\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ parallelle.
(variant av 5c))

1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$: $\vec{c} = -\vec{a}-\vec{b}$.

2) $k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 2\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$

$k\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c} - 2\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c} = \vec{0}$

$(k-2)\vec{a} + (k+1)\vec{b} + (k-2)\vec{c} = 0$ $\qquad$ $\vec{a}, \vec{b}$ lineært uavhengige.

$\vec{c} = \frac{-1}{(k-2)}\left((k-2)\vec{a} + (k+1)\vec{b}\right)$

$\underline{\vec{c} = -\vec{a} - \frac{(k+1)}{(k-2)}\vec{b}}$. $\qquad k \in \mathbb{R}$.

Løsningene er $\underline{\vec{c} = -\vec{a}-\vec{b}}$

og $\underline{\vec{c} = -\vec{a} - \frac{k+1}{(k-2)}\vec{b}}$ $\qquad k \in \mathbb{R}$

$\left(-\vec{a}-\vec{b}-\frac{3}{k-2}\vec{b}\right)$