10 mars
26

Eksamen 26. mai 25

#5 a) $A(2,0,-1)$ $B(-1,1,3)$ $C(1,4,4)$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [-1,1,3] - [2,0,-1] = \underline{[-3, 1, 4]}$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [1,4,4] - [2,0,-1] = \underline{[-1, 4, 5]}$

$\vec{AB} - 2\vec{AC} = [-3,1,4] - 2[-1,4,5]$
$= [-3,1,4] + [2,-8,-10]$
$= \underline{\underline{[-1,-7,-6]}} = (-1)[1,7,6]$

b) (Vi sjekker at koordinatene til A, B og C oppfylle likningen. De tre punkten ligga
I ikke på en linje. så likningen har løsninger som e planet gjennom A, B og C).

II Vi finna en normal vektor til planet. En slik vektor e $\vec{AB} \times \vec{AC}$

$[-3,1,4] \times [-1,4,5]$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1, & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \right]$$
$$= [5-16, -(-15+4), -12+1]$$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = [-11, 11, -11]$

$= -11 \underline{[1, -1, 1]}$

Vi velger normalvektoren $\vec{n} = [1, -1, 1]$ til planet.

Likningen til planet er

$[x, y, z] \cdot \vec{n} = d$

$x - y + z = d$.

Bestemmer d ved å sette inn koordinaten til $A(2, 0, -1)$.

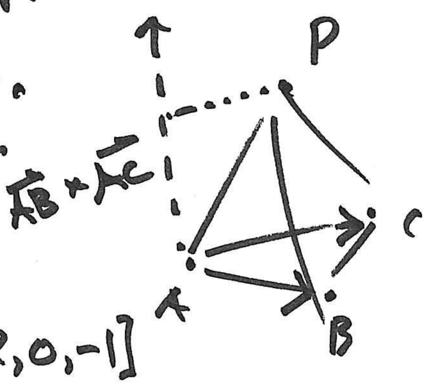
$2 - 0 + (-1) = d$

så $d = 1$.

Likningen til planet som inneholder A, B og C er

$\underline{x - y + z = 1}$

c) $P(2, 6, 2)$ toppunkt i en pyramide med ΔABC som grunnflate.



Vi finner volumet til pyramiden

$V = \left| \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \vec{AP} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) \right|$

$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = [2, 6, 2] - [2, 0, -1]$

$= [0, 6, 3] = \underline{3[0, 2, 1]}$

$$V = \left| \frac{1}{6} \, 3[0,2,1] \cdot (-11)[1,-1,1] \right|$$

skalarprodukt er bilineært.

$$= \frac{3 \cdot 11}{6} \underbrace{|(0 + (-2) + 1)|}_{1}$$

$$V = \underline{\underline{\frac{11}{2}}} = 5.5$$

d) ℓ linje normalt på planet og går gjennom $P(2,6,2)$.

ℓ skjærer xy-planet i Q.

Finn Q.

ℓ er parallell til en normalvektor til planet. Velger retningsvektor $\vec{r} = [1,-1,1]$.

En parametrisering av linjen:

$$[x,y,z] = \vec{OP} + t\vec{r}$$
$$= [2,6,2] + t[1,-1,1].$$

xy-planet: $z = 0$

Løsningen er alle punkt $(x,y,0)$
$x,y \in \mathbb{R}$

Setter parametriseringen av linjen inn i likningen for planet:

$2 + t = 0$, så $\underline{t = -2}$

Da er $[x,y,z] = [2,6,2] + (-2)[1,-1,1] = [0,8,0] = \vec{OQ}$ så

$\underline{Q(0,8,0)}$

FORK1120 - Matematikk forkurs Oslomet

Test

Tirsdag 10. mars 2026

~~Oppgi svarene med eksakte vinkler~~.

Oppgave 1. Linjen som går gjennom punktet $(3, 5, 7)$ med retningsvektor $\vec{r} = [-2, 3, 5]$ møter planet

$$2x - y + z = 14$$

i et punkt. Finn koordinatene til punktet. Q

En parametrisering av linjen er: $[x, y, z] = [3, 5, 7] + t[-2, 3, 5]$.

$x = 3 - 2t$
$y = 5 + 3t$
$z = 7 + 5t$.

setter koordinatene inn i likningen for planet:

$2(3-2t) - (5+3t) + (7+5t) = 14$

$6 - 4t - 5 - 3t + 7 + 5t = 14$

$(6-5+7) + (-4-3+5)t = 14$

$-2t = 14 - 8 = 6$, så $\underline{t = -3}$

$\vec{OQ} = [3, 5, 7] + (-3)[-2, 3, 5]$
$= [3, 5, 7] + [6, -9, -15]$
$= [9, -4, -8]$

$\underline{Q(9, -4, -8)}$

Oppgave 2. Gitt to plan $2x + y - 2z = 0$ og $3x - 4z = 4$.

Hva er vinkelen mellom plana? Normalvektorer til plana er henholdsvis $\vec{n}_1 = [2, 1, -2]$ og $\vec{n}_2 = [3, 0, -4]$

Vinkelen mellom plane er vinkelen mellom linjer vinkelrett på plana. Vinkel mellom n_1 og n_2: θ. $\cos\theta = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

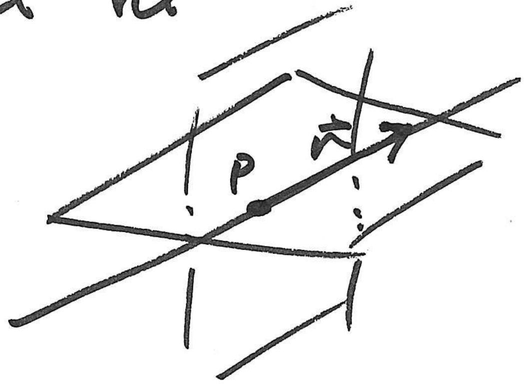
De to plana snitter i en linje (de felles punktene). Parametriser denne linjen.

$$\cos\theta = \frac{[2, 1, -2] \cdot [3, 0, -4]}{\sqrt{4+1+4}\,\sqrt{9+16}} = \frac{6+0+8}{3 \cdot 5} = \underline{\frac{14}{15}}$$

$\theta = \arccos\left(\frac{14}{15}\right) = \underline{21^\circ}$ $(< 90^\circ)$ så vinkelen mellom plana er $\underline{\sim 21^\circ}$

Oppgave 3. Anta vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ikke er parallelle. Finn en ikke-null vektor uttrykt som en lineær kombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ som er ortogonal til $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. (Det vil si på formen $s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$.)

2 (del 2) Parametriser snittet til



$$2x + y - 2z = 0$$
og
$$3x - 4z = 4$$

Finner et punkt i snittet:

$P(0, y, -1)$ likning 2 ✓

likning 1 $2 \cdot 0 + y - 2(-1) = 0$

$y + 2 = 0$

så $y = -2$.

$\underline{P(0,-2,-1)}$ ligger i snittet

En retningsvektor er bestemt av at den står vinkelrett på begge normalvektorene.

$\vec{r} = [r_1, r_2, r_3]$ (kan benytte $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \ldots$)

$\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = 3r_1 + (-4)r_3 = 0$

velger $r_1 = 4$, $r_3 = 3$.

$\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = [4, r_2, 3] \cdot [2, 1, -2]$

$= 8 + r_2 - 6 = 0$

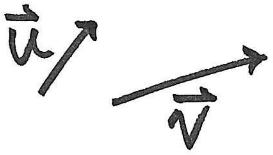
$2 + r_2 = 0$ så $r_2 = -2$.

En retningsvektor til linjen er

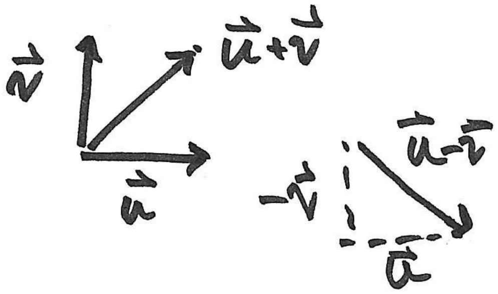
$\vec{r} = [4, -2, 3]$.

parametrisering av snittlinjen $[x,y,z] = \vec{OP} + t\vec{r}$

$$\underline{[x,y,z] = [0,-2,-1] + z[4,-2,3]}$$

3. 

Finn $(s\vec{u}+t\vec{v})$ som er ortogonal til $\vec{u}+\vec{v}$.
$\neq 0$

(

$|\vec{u}|=|\vec{v}|$

ortogonal til $\vec{u}+\vec{v}$)

Forsøke med $s=1$: $\vec{u}+t\vec{v}$
er ortogonal til $\vec{u}+\vec{v}$ når:

$$(\vec{u}+t\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=0$$

$$|\vec{u}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+t(\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2)=0$$

$$t=-\frac{|\vec{u}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}}.$$

Når $|\vec{v}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}\neq 0$: $\vec{u}-\frac{|\vec{u}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}}\vec{v}$
er ortogonal til $\vec{u}+\vec{v}$.

Når $|\vec{v}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ så er $\vec{v}$ er ortogonal
$\vec{v}\cdot(\vec{v}+\vec{u})=0$ til $\vec{u}+\vec{v}$.