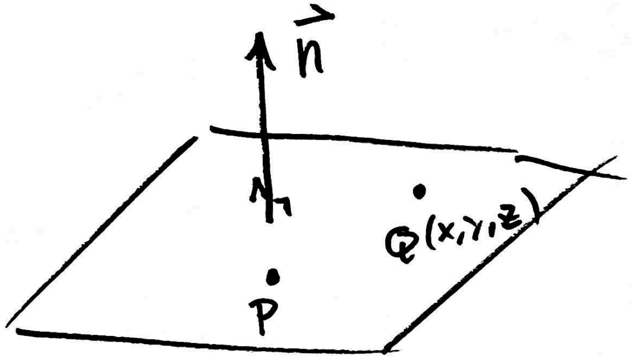
9 mars
26

13D



Q i planet $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0$

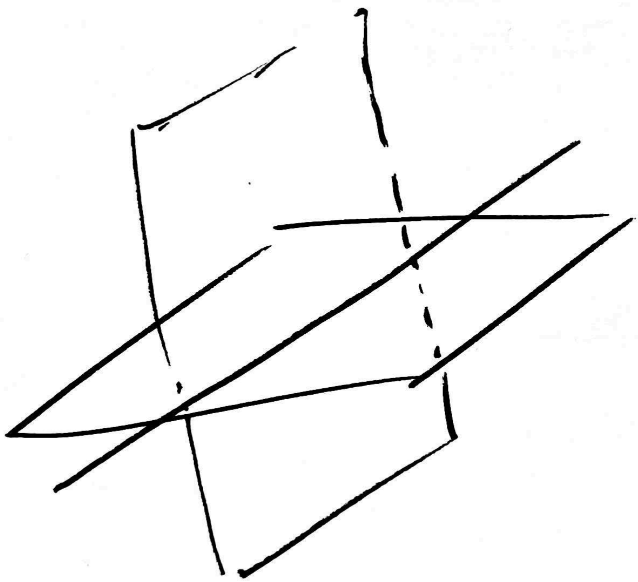
$(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{n} = 0$

$[x, y, z] \cdot \vec{n} = d = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}$

$ax + by + cz = d$

hvor $\vec{n} = [a, b, c]$ er en normalvektor.

To plan ikke parallelle



Vinkelen mellom to plan er vinkelen mellom to linjer vinkelrett på planene.

$$x - 2y + 5z = 4$$
$$3x + y - z = -3$$

Hva er vinkelen mellom plana?

Normalvektorer $\vec{n}_1 = [1,-2,5]$ og $\vec{n}_2 = [3,1,-1]$

vinkelen mellom $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{[1,-2,5]\cdot[3,1,-1]}{|[1,-2,5]| \cdot |[3,1,-1]|}$$

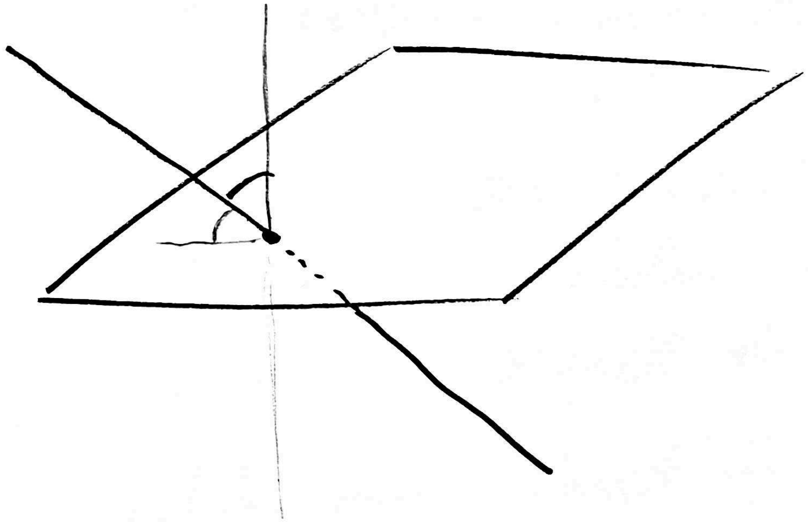
$$= \frac{3-2-5}{\sqrt{1+4+25}\sqrt{9+1+1}} = \frac{-4}{\sqrt{30}\sqrt{11}} = \underline{\frac{-4}{\sqrt{330}}}$$

$$\sim -0.2202$$

så $\theta = \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{330}}\right) \sim 102.72°$

Vinkelen mellom plane (mellom 0° og 90°) er derfor lik

$$180° - \theta = \underline{77.28°}$$



Vinkelen mellom en linje og et plan er $90° - ($vinkelen mellom linjen og en normallinje til planet$)$

Eks

Linje : $[x, y, z] = [1, -2, 3] + t[1, 2, -2] \quad t \in \mathbb{R}$

Plan : $[2, 2, 1] \cdot [x, y, z] = -5$

Hva er vinkelen mellom disse.

Retningsvektor til linjen $\vec{r} = [1, 2, -2]$

— til normallinje til planet $\vec{n} = [2, 2, 1]$

Vinkelen mellom $\vec{r}$ og $\vec{n}$: $\dfrac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}||\vec{n}|} = \cos \Theta$

$$\cos\theta = \frac{[1,2,-2]\cdot[2,2,1]}{\sqrt{1+4+4}\ \sqrt{1+4+4}} = \frac{2+4-2}{9} = \frac{4}{9}$$

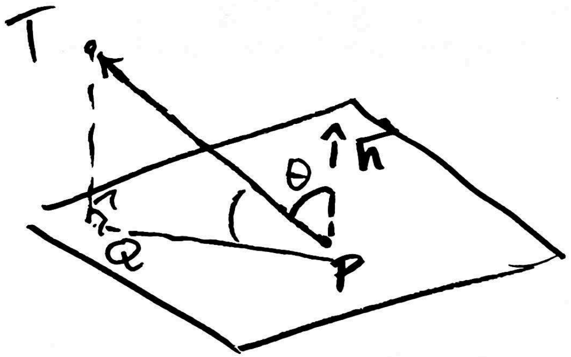
$$\theta = \arccos\left(\frac{4}{9}\right) \sim \underline{63.61^\circ} \quad (< 90^\circ)$$

så vinkelen mellom linjen og en normallinje til planet er 63.61°.

Vinkelen mellom planet og linjen er derfor

$$90^\circ - 63.61^\circ \sim 30^\circ - 3.61^\circ$$

$$= \underline{26.39^\circ}$$



Avstand mellom et punkt T og et plan er

$$|\vec{PT}| \cdot |\cos\theta|$$

$$= \frac{|\vec{PT} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Eksempel: $T(1,2,-4)$

Plan $x - 2y + z = 5$

Hva er avstanden mellom T og planet?

Vi finner et punkt i planet: $P(1,-2,0)$.
$(1 - 2(-2) + 0 = 5 \checkmark)$

$$\vec{PT} = \vec{OT} - \vec{OP} = [1,2,-4] - [1,-2,0] = [0,4,-4]$$
$$= \underline{4[0,1,-1]}$$

En normalvektor er $\vec{n} = [1, -2, 1]$.

$$|\vec{n}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}.$$

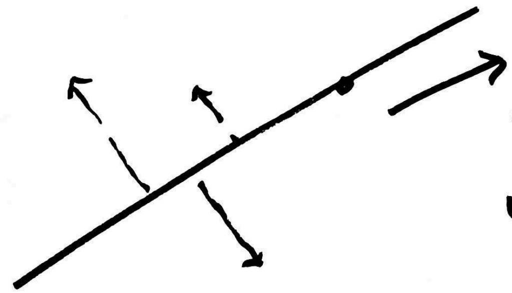
Korteste avstand er $\dfrac{|\vec{PT} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

$$= \frac{|4[0,1,-1] \cdot [1,-2,1]|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{6}} |0-2-1| = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{6}} = 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{6}}$$

$$= \underline{2\sqrt{6}}$$

Hvordan finne normalvektor til en linje?
(i planet)



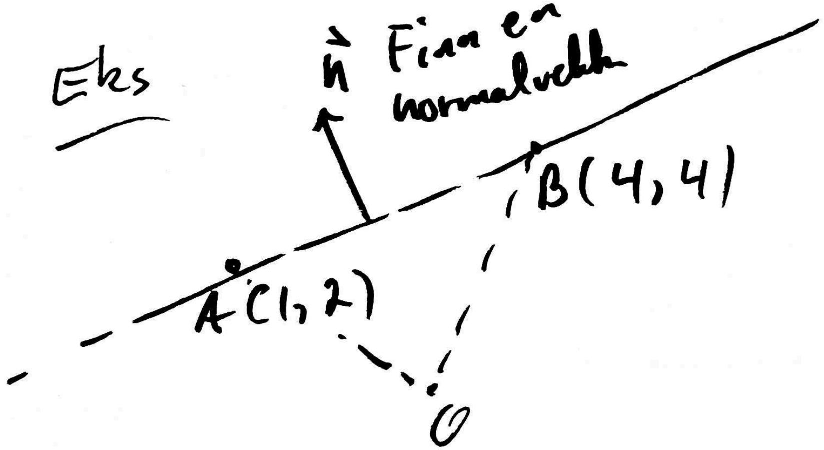
$\vec{r} = [a, b] \neq \vec{0}$
retningsvektor.

$\vec{n}$ er en normalvektor til linja $\Leftrightarrow$ $\vec{n} \neq 0$
og $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$

$\vec{n} = [b, -a]$ opp til skalering.

Alle normalvektorer er på formen $k[b, -a]$
hvor $k \neq 0$.

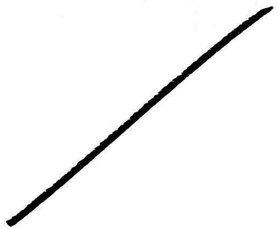
Eks



$\vec{AB} = \vec{r}$ er en retningsvektor

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$
$= [4,4] - [1,2] = [3,2]$

En normalvektor er $\underline{[2, -3]}$



Stigningstall k

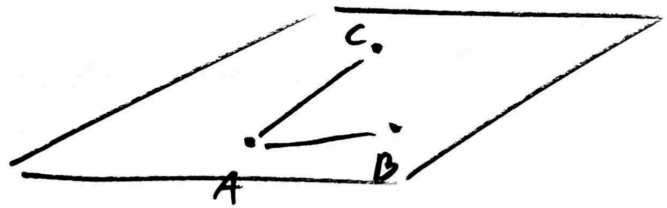
$\Leftrightarrow$ retningsvektor en skalering av $[1, k]$

En normalvektor er $[k, -1]$

$= k\left[1, \frac{-1}{k}\right]$.

Det svarer til en linje med stigningstall $\underline{\frac{-1}{k}}$.

Hvordan finne normallinje til plan.



A, B, C punkt i planet. (ikke på en linje)

$\Updownarrow$

A punkt i planet

$\vec{b} = \vec{AB}$ vektorer i

$\vec{c} = \vec{AC}$ planet.

(ikke parallelle)

Da vil $\vec{b} \times \vec{c}$ være en normalvektor til planet.

Eks $A(0,0,0)$ origo $B(1,2,3)$ og $\vec{C}(2,-1,0)$

$\vec{b} = \vec{AB} = [1,2,3]$, $\vec{c} = \vec{AC} = [2,-1,0]$.

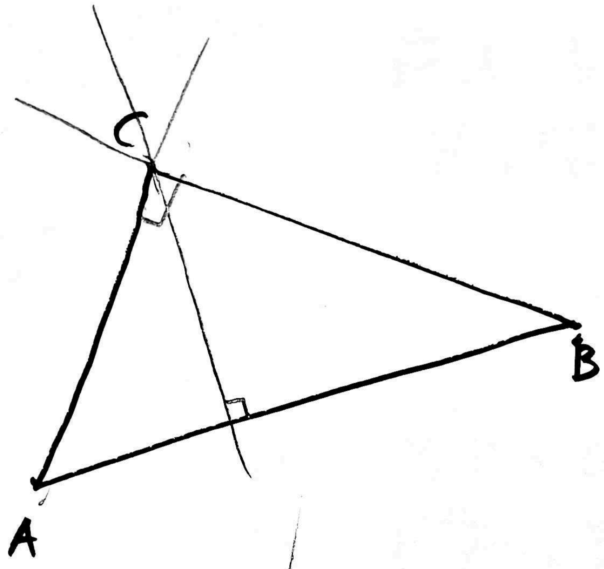
$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

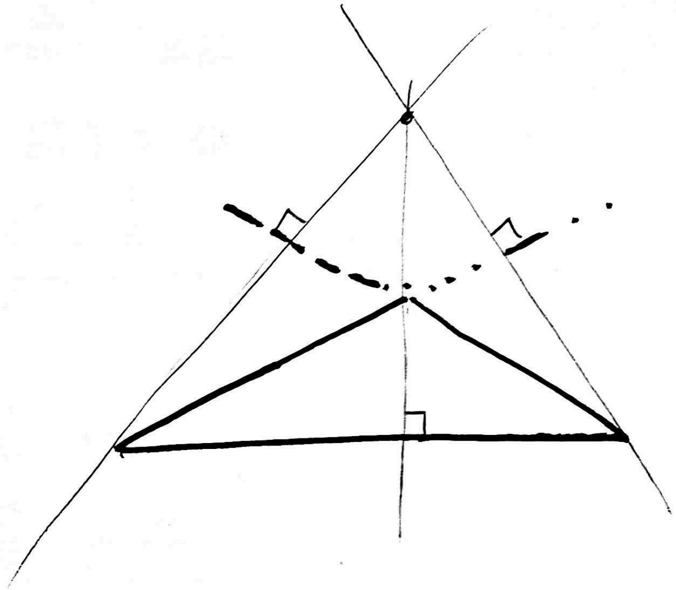
$$= \left[\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [3, 6, -5]$$

En normalvektor til planet er $\underline{\vec{n} = [3,6,-5]}$

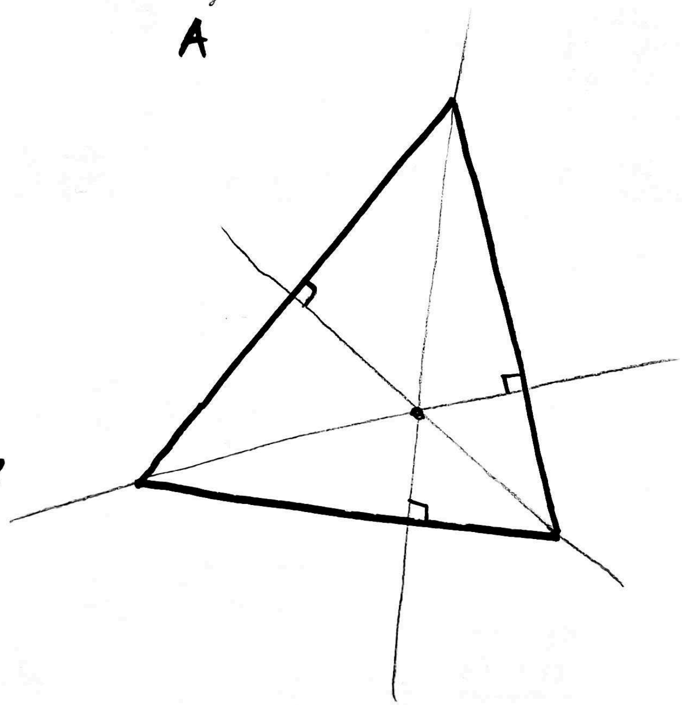
Eksempel
(Resultat)

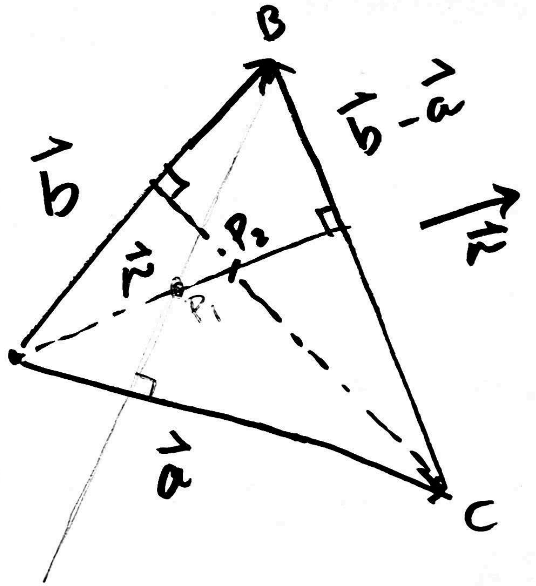




Resultat:

De tre linjene fra hvert hjørne i en trekant, og vinkelrett på motstående sider møtes i ett punkt.





$A = O$
$(0.0.0)$

$\vec{r} \perp \vec{b}-\vec{a}$ så

$$\vec{r} \cdot (\vec{b}-\vec{a}) = 0$$

$$\underline{\vec{r} \cdot \vec{b} = \vec{r} \cdot \vec{a}}$$

1) $\overrightarrow{P_1B} \cdot \vec{a} = 0$

2) $\overrightarrow{P_2C} \cdot \vec{b} = 0$

$\overrightarrow{OP_1} = s_1 \vec{r}$ og $\overrightarrow{OP_2} = s_2 \vec{r}$

Vi ønsker å vise at $s_1 = s_2$ for da er $\underline{P_1 = P_2}$

1) $(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP_1}) \cdot \vec{a} = 0$

$(\vec{b} - s_1\vec{r}) \cdot \vec{a} = 0$

så $\vec{a} \cdot \vec{b} = s_1 \vec{r} \cdot \vec{a}$

2) $(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP_2}) \cdot \vec{b} = 0$

$(\vec{a} - s_2\vec{r}) \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = s_2 \vec{r} \cdot \vec{b}$

$s_1 = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{r} \cdot \vec{a}}$ og $s_2 = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{r} \cdot \vec{b}}$

er like siden $\vec{r} \cdot \vec{a} = \vec{r} \cdot \vec{b}$, og derfor e $P_1 = P_2$ og de tre linjene møtes.

Kontinuasjonseksamen 2022

#4 $A(2,4,-3)$, $B(5,2,2)$ og $C(0.0.5)$ punkter i rommet.

a) Regn ut $|\vec{AB}|$ og $|\vec{AC}|$

b) — arealet av ΔABC

c) Finn en parameterfremstilling for planet ΔABC ligger i.

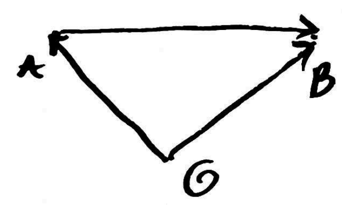
d) Regn ut $\angle DAC$

e) ABC sammen med $D(3,1,8)$ danner en trekantet pyramide.

Vis at volumet til pyramiden er $35/3$.

f) Regn ut høyden av pyramiden fra D ned til (planet hva). ΔABC.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$
$$= [5,2,2] - [2,4,-3]$$
$$= \underline{[3,-2,5]}$$

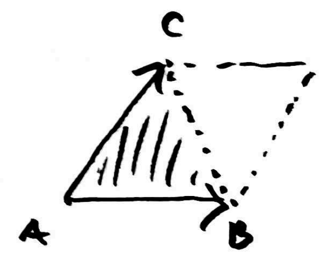


$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$$
$$= [0,0,5] - [2,4,-3]$$
$$= [-2,-4,8] = 2[-1,-2,4].$$

a) $|\vec{AB}| = |[3,-2,5]| = \sqrt{9+4+25} = \underline{\sqrt{38}}$

$|\vec{AC}| = |2[-1,-2,4]| = 2\sqrt{1+4+16} = \underline{2\sqrt{21}}$

b) Areal $\Delta ABC = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$



$$\vec{AB} \times \vec{AC} = 2\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\left[\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 2\left[-8-(-10), -\left(12-(-5)\right), -6-(2)\right]$$

$$= \underline{2[2, -17, -8]}$$

Arealet til $\triangle ABC = \frac{1}{2}\left|2[2,-17,-8]\right| = \sqrt{4+17^2+8^2}$

$$= \sqrt{4+289+64} = \sqrt{289+68}$$

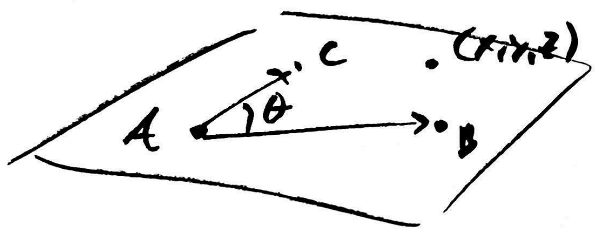
$$= \underline{\sqrt{357}}$$

$$\left(\begin{aligned} 17^2 &= (10+7)^2 \\ &= 100+2\cdot 70+49 \\ &= 289 \end{aligned}\right)$$

$$\left(\begin{aligned} 357 &= 360-3 \\ &= 3(120-1) \\ &= 3\cdot 119 \end{aligned}\right)$$

c)

$[x, y, z] = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$



$= [2, 4, -3] + s[3, -2, 5] + t[-1, -2, 4] \qquad s, t \in \mathbb{R}$

planet:
$$\begin{aligned} x &= 2 + 3s - t \\ y &= 4 - 2s - 2t \\ z &= -3 + 5s + 4t. \end{aligned}$$

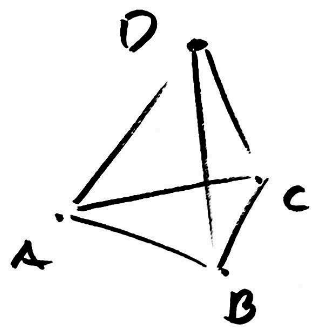
d) $\angle BAC$ = vinkelen mellom $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$ $= \theta$

$$\cos\theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AC}|} = \frac{[3, -2, 5] \cdot [-1, -2, 4]}{|\vec{AB}|\,|\vec{AC}|}$$

$$= \frac{-3 + 4 + 20}{\sqrt{38} \cdot 2\sqrt{21}} = \frac{21}{2\sqrt{38}\sqrt{21}} = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{38}}} \sim \underline{0.3717}.$$

så $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{36}}\right) \sim \underline{68.18^\circ}$

e) $\vec{OD} = [3,1,8]$



$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\,|(\vec{AB}\times\vec{AC})\bullet\vec{AD}|$$

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = [3,1,8]-[2,4,-3]$$

$$\vec{AD} = [1,-3,11].$$

Tidligere: $\vec{AB}\times\vec{AC} = 2[2,-17,-8]$

$$V = \frac{1}{6}\,|2[2,-17,-8]\bullet[1,-3,11]|$$

$$= \frac{1}{6}2\,|2+51-88| = \frac{1}{3}|53-88| = \frac{1}{3}|-35|$$

$$= \underline{\frac{35}{3}}$$

f) $V = \frac{1}{3}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{høyde}}}{h}\cdot(\text{areal }\Delta ABC)$ så $h = \frac{3V}{\text{areal }\Delta ABC}$

$$h = \frac{3(35/3)}{\sqrt{357}} = \frac{35}{\sqrt{357}} \approx \underline{1.852}$$