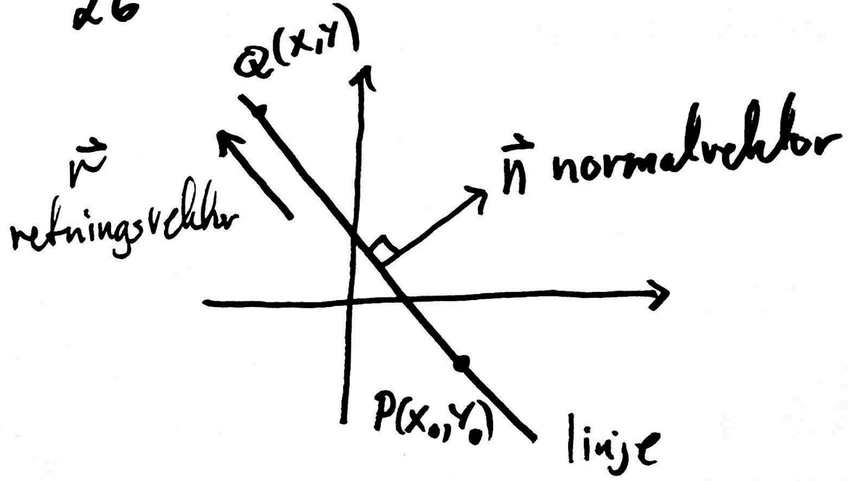
4 mars 26

13A Linjer



Likning for linjen

$\vec{PQ} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow Q(x,y)$ ligger på linjen

$\vec{n} = [a,b] \neq \vec{0}$

$(\vec{OQ} - \vec{OP}) \cdot \vec{n} = 0$

$[x,y] \cdot \vec{n} = [x_0,y_0] \cdot \vec{n}$

$ax + by = d \; (= ax_0 + by_0)$

Likning for linje i planet

$\underline{ax + by = d}$ $\quad [a,b] \neq \vec{0}$

$b = 0$ $\quad ax = d \Leftrightarrow x = d/a$.

vertikale linjen $\underline{x = d/a}$.

$b \neq 0$ $\quad by = d - ax$ deler med b

$y = \frac{-a}{b} x + \frac{d}{b}$.

linje med stigningstall $-a/b$ som treffer y-aksen i $y = d/b$.

Parameterfremstilling.

$\overrightarrow{PQ} = t\vec{r}$ for en skalar t

$\Leftrightarrow$ $Q(x,y)$ er på linjen.

$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = t\vec{r}$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t\vec{r}$

$\underline{[x,y] = [x_0, y_0] + t\vec{r}}$

Hvis normalvektoren er $\vec{n} = [a,b]$

så er $\vec{r} = [-b, a]$.

$[x,y] = [x_0, y_0] + t[-b, a]$

$x = x_0 - bt$

$y = y_0 + at$.

Eksempel En linje i planet går gjennom $(1,-2)$ og $(3,5)$.

1) Parametriser linjen

2) Likning for linjen.

En vektor parallell til linjen er $\overrightarrow{(1,-2)(3,5)}$

$= [3-1, 5-(-2)] = \underline{[2,7]}$

Velger denne som retningsvektor

$\vec{r} = [2,7]$

normalvektor $\vec{n} = [7,-2]$

1) $[x,y] = [1,-2] + t\vec{r}$

$\underline{x = 1 + 2t \text{ og } y = -2 + 7t}$

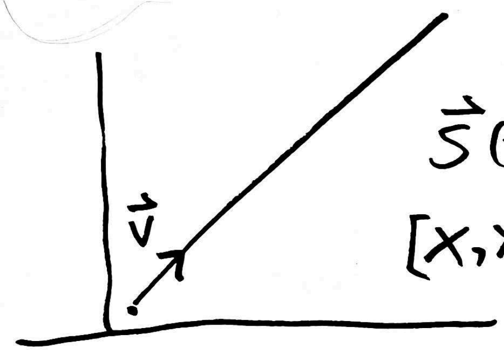
2) $[x,y] \cdot \vec{n} = [1,-2] \cdot \vec{n} = [1,-2] \cdot [7,-2]$

$7x - 2y = 11$.

Eks Posisjon ved $t=0$ er $(1,2)$ m

Objektet beveger seg med konstant

hastighet $\vec{v} = [4,3]$ m/s for $t \in [0,10]$ s



Posisjon ved tiden t

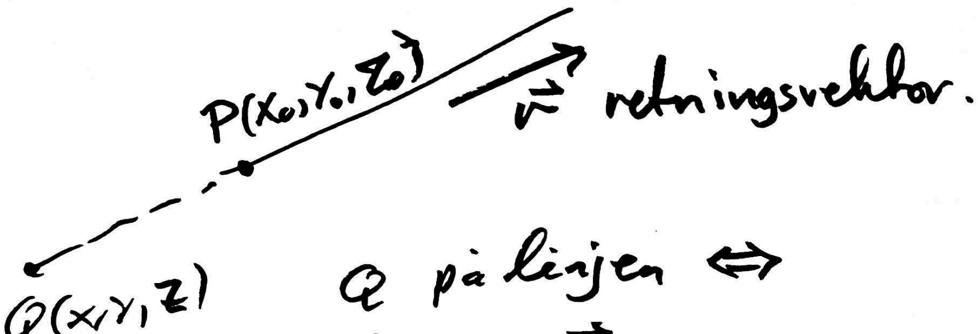
$$\vec{s}(t) = [1,2]\,\text{m} + \vec{v} \cdot t$$

$$[x,y] = [1,2]\,\text{m} + [4,3]\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\,t$$

$$x = 1\,\text{m} + 4\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

$$y = 2\,\text{m} + 3\,\text{m/s} \cdot t\,.$$

Linjer i rommet $\mathbb{R}^3$



Q på linjen $\Leftrightarrow$

$$\vec{PQ} = t\vec{r}.$$

$$\vec{OQ} - \vec{OP} = t\vec{r}$$

$$[x, y, z] = [x_0, y_0, z_0] + t\vec{r}$$

Hvis $\vec{r} = [r_1, r_2, r_3]$

$$x = x_0 + r_1 t$$
$$y = y_0 + r_2 t \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$z = z_0 + r_3 t$$

Eks. En linje i $\mathbb{R}^3$ går gjennom $A(-1, 3, 5)$ og $B(2, 3, 1)$. Parametrisere linjen.

$\vec{AB} = \vec{r}$ er en retningsvektor

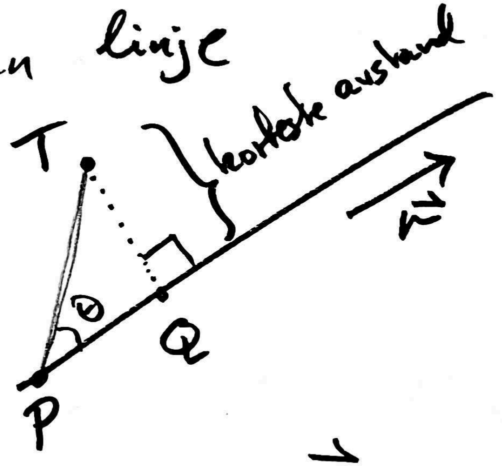
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$
$$= [2, 3, 1] - [-1, 3, 5]$$
$$= [3, 0, -4].$$

Parametrisering

$$[x, y, z] = \vec{OB} + t\vec{r}$$
$$= [2, 3, 1] + t[3, 0, -4].$$

$$x = 2 + 3t$$
$$y = 3$$
$$z = 1 - 4t$$

Avstand mellom punkt T og en linje



Korteste avstand $= |\vec{PT}| \sin\theta$

$$= \frac{|\vec{PT} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

$\vec{PQ}$ er komponenten til PT langs $\vec{r}$

$$\vec{PQ} = \frac{\vec{PT} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \underline{\frac{\vec{PT} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \vec{r}}$$

$$\underline{\vec{OQ} = \vec{OP} + \frac{\vec{PT} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \vec{r}}$$

Q er punktet på linjen som er nærmest T.

korteste avstand er $|\vec{QT}| = |\vec{PT} - \vec{PQ}| = \underline{\left|\vec{PT} - \frac{\vec{PT} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \vec{r}\right|}$

* Finn korteste avstand mellom punktet $T(1,2,3)$ og linjen gjennom origo med retningsvektor $\vec{r} = [2,-1,2]$.

$P = O\ (0,0,0)$

$$\frac{|\vec{PT} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{PT} \times \vec{r} = [1,2,3] \times [2,-1,2] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [\ 7,\ 4,\ -5\ ]$$

$$|\vec{PT} \times \vec{r}| = \sqrt{49+16+25} = \sqrt{90} = \sqrt{9}\sqrt{10} = \underline{3\sqrt{10}}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

Korteste avstand mellom T og planet er $\frac{3\sqrt{10}}{3} = \underline{\underline{\sqrt{10}}}$

13C Linjer beskrevet av likningssystem.

Linjer i rommet er felles løsning til

$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$ $\quad \vec{n}_1 = [a_1, b_1, c_1]$ og $\vec{n}_2 = [a_2, b_2, c_2]$

$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$ $\quad$ ikke er parallelle.

(Snittlinjen til de to ikke-parallelle plana.)

Eksempel: parametriser snittlinjen til

$x + 2y + 3z = 10$ og $2x - y + 2z = 5$.

$\vec{n}_1 = [1, 2, 3]$ $\quad \vec{n}_2 = [2, -1, 2]$

En retningsvektor til snitt-linjen er $\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \underline{[7, 4, -5]}$

Vi finner et punkt P på snittlinjen.

Søker snittpunktet mellom linjen og xy-planet $(z=0)$:

$x + 2y = 10$

$2x - y = 5$ så $y = 2x - 5$

setter inn $y = 2x-5$ i den første likningen

$$x + 2(2x-5) = 10$$
$$x + 4x - 10 = 10$$
$$5x = 20$$
$$x = 20/5 = \underline{4} \quad \text{og} \quad y = 2\cdot 4 - 5 = \underline{3}$$

så $(4,3,0)$ ligger på snittlinjen.

Parametrisering $\underline{[x,y,z]} = \underline{[4,3,0] + t[7,4,-5]}$ $t \in \mathbb{R}$

Linje

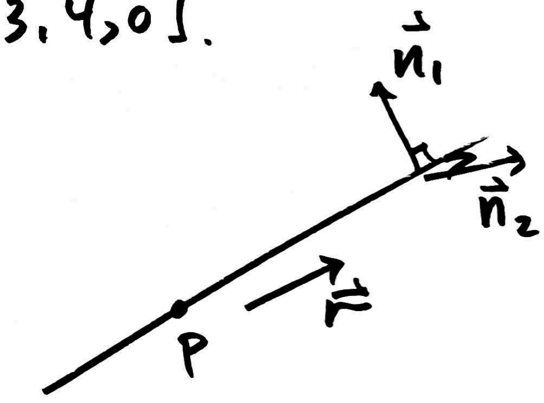
$$x = 2 - 3t$$
$$y = 4t \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$z = -3$$

Beskriv linjen som et snitt av to plan.

$$[x, y, z] = [2, 0, -3] + [-3, 4, 0]t$$

$P(2,0,-3)$ punkt på linjen.

retningsvektor $\vec{r} = [-3, 4, 0]$.



Velger to ikke-parallelle vektorer som er ortogonale til $\vec{r}$.

$$\vec{n}_1 = [4, 3, 0]$$
$$\vec{n}_2 = [0, 0, 1]$$

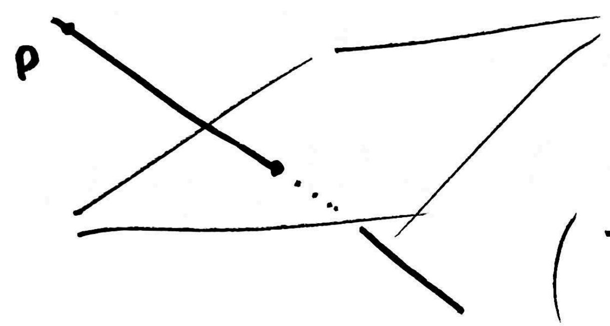
$$4x + 3y = d_1$$
$$z = d_2$$

siden $P(2,0,-3)$ ligger i plana

Linjen er snittet til plana:

$$4x + 3y = 8$$
$$z = -3$$

Snitt mellom plan og linje i $\mathbb{R}^3$.



snittet deres er typisk ett punkt.

(- kan også være tomt eller linjen selv)

Finn snittet mellom planet $2x - 4y + 5z = 2$ og linjen $[x, y, z] = [1, 1, 1] + [2, -1, 2]t$

retningsvektoren til linjen $\cdot$ normal vektor til planet $\neq 0$, så snittet er ett punkt.

Setter inn koordinatene for punktene på linjen i likningen for planet:

$$2(1+2t) - 4(1-t) + 5(1+2t) = 2$$
$$2+4t \quad -4 + 4t \quad +5 + 10t = 2$$
$$18t + 3 = 2$$
$$18t = -1 \quad \text{så} \quad \underline{t = \frac{-1}{18}}$$

$$\overrightarrow{O\,\text{Snittpunktet}} = [1,1,1] + \frac{-1}{18}[2,1,2]$$
$$= \frac{1}{18}[16, 17, 16] = \left[\frac{8}{9}, \frac{17}{18}, \frac{8}{9}\right]$$

Snittpunktet e $\underline{\left(\frac{8}{9}, \frac{17}{18}, \frac{8}{9}\right)}$.

Oppg. Finn en parametrisering av snittet mellom de to ikke-parallelle plana:

$$x + y + z = 0 \qquad \text{normalvektor } \vec{n}_1 = [1,1,1]$$
$$-x + 2y + 3z = 5 \qquad \text{— } \vec{n}_2 = [-1,2,3].$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right] = \underline{[1, -4, 3]}$$

Finner et punkt på snittlinjen.

$z=0$ snittet mellom linjen og xy-planet

$$x+y=0 \iff -x=y$$

$$-x+2y=5$$

så $3y=5$ og $y=\frac{5}{3}$

$x=-5/3$.

$\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ ligger på linjen.

Parametrisering: $[x,y,z] = \underline{\left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0\right] + t[1,-4,3]}$