2 mars 26   12F og H   Determinanter og trevektorproduktet.

(Tirsdag og onsdag: linjer og plan i rommet)

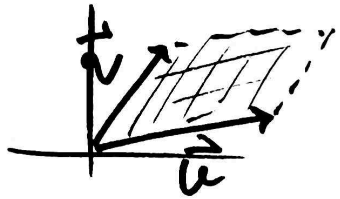
2×2 determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\underbrace{\left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|}_{\text{matrise}} = \left|\underbrace{\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}}_{\text{søylevektor}}\right| = \left|\underbrace{\begin{matrix} [a, b] \\ [c, d] \end{matrix}}_{\text{radvektor.}}\right|$$

- Antisymmetriske ved bytte av rader og bytte av søyler.
- Lineær i hver radvektor i hver søylevektor.
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Determinanten er bestemt av disse egenskapene.

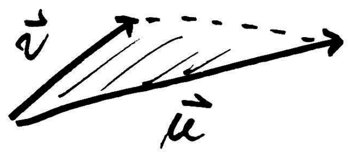
$\vec{u} = [a, b]$
$\vec{v} = [c, d]$



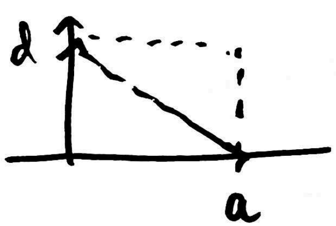
parallellogrammet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Arealet til parallellogrammet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er lik $\mathrm{abs}\left(\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right)$

Trekant utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har areal $\frac{1}{2}\mathrm{abs}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

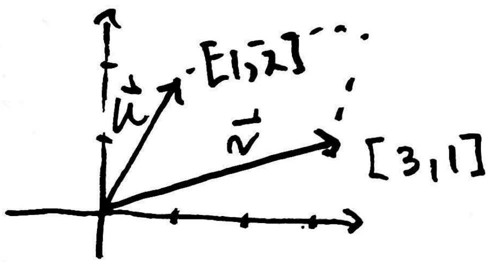


(halvparten av parallellogrammet)



Rektangel med areal $|a \cdot d| = \mathrm{abs}(a \cdot d)$

sjekker: $\mathrm{abs}\begin{vmatrix} a, & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = \mathrm{abs}(a \cdot d)$ ✓



Arealet til parallellogrammet

$\mathrm{abs}\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix} = \mathrm{abs}\begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{abs}(1 \cdot 1 - 2 \cdot 3)$

$= \mathrm{abs}(-5) = \underline{\underline{5}}$

3×3 determinanter

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

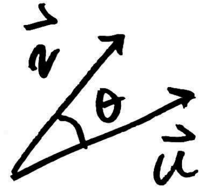
Søylevis
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Egenskaper : - antisymmetrisk ved bytte av to rader (søyler)
- Lineær i hver rad (og søyle)
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

(Determinanten er bestemt av disse egenskapene)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 2(-3-4) - 3(3-2)$$
$$= 2(-7) - 3 \cdot 1 = \underline{-17}$$

Vektorproduktet



$\vec{u} \times \vec{v}$ vektor
ortogonal til $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
slik at $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{u} \times \vec{v}$ er
et høyrehåndsystem.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$$

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ antisymmetrisk (skjev symmetrisk)

Lineært i $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.

$$[x_1, x_2, x_3] \times [y_1, y_2, \cancel{z_3}y_3]$$
$$= \left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right]$$

kan skrives som:

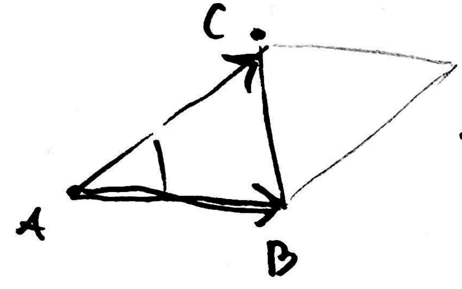
$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1, & \vec{e}_2, & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{u}, \vec{v}$ to vektorer i rommet

$$\underbrace{|\vec{u} \times \vec{v}|}_{\text{lengden til vektoren } \vec{u}\times\vec{v}} = \text{arealet til parallellogrammet utspent av } \vec{u} \text{ og } \vec{v} \text{ i rommet.}$$

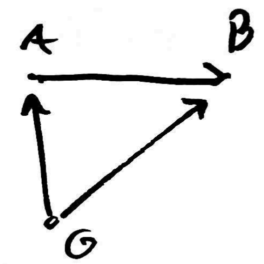
Eks Vi skal finne arealet til trekant ABC hvor koordinatene er:

$A(0,2,0)$, $B(1,2,3)$ og $C(4,5,6)$



Arealet til ΔABC

$= \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$



$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [1,2,3] - [0,2,0] = [1,0,3]$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [4,5,6] - [0,2,0] = [4,3,6].$$

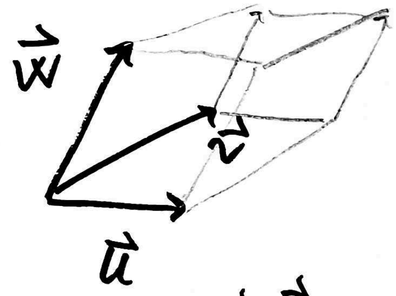
$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [0-9, -(6-12), 3-0]$$

$$= [-9, 6, 3] = \underline{3[-3,2,1]}$$

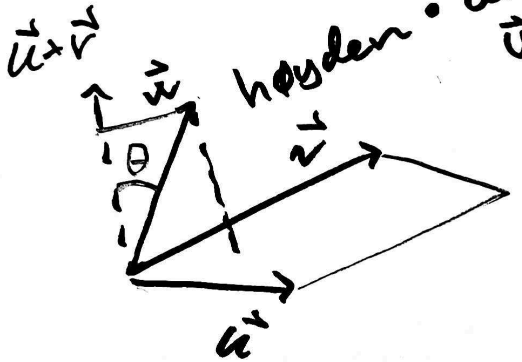
$$\text{Arealet} = \frac{1}{2} \left| 3[-3,2,1] \right| = \frac{3}{2}\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2} = \underline{\frac{3}{2}\sqrt{14}}$$

Parallellepiped (3D parallellogram)



utspent av $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$\vec{u} \times \vec{v}$



høyden · arealet til $\vec{u}, \vec{v}$ parallellogrammet.

høyden er $|\vec{w}| \cos\theta$.

$$|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \underbrace{|\vec{u} \times \vec{v}|}_{\text{areal grunnflate}} \cdot \underbrace{|\vec{w}| \cos\theta}_{\text{høyden}}.$$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ trippel produkt av $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

($\vec{u} \times (\vec{v} \cdot \vec{w})$ gir ikke mening)

$$\underbrace{[w_1, w_2, w_3]}_{\vec{w}} \bullet \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_{\vec{u}\times\vec{v}} = \underbrace{\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_{3\times 3 \text{ determinant}}.$$

Trippelproduktet (trevektorproduktet)

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \mapsto \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{w} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix}$$ (to bytter av vektorer)

Arealet til parallellepipedet utspent av $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ er lik $\underline{\mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{vmatrix}\right)}$.

Finn volumet til parallellepipedet utspent av

$\vec{u} = [-2, 3, 5]$ $\quad$ $\vec{v} = [5, 10, 0]$ $\quad$ $\vec{w} = [2, -3, 7]$

$$V = \text{abs} \begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix} = \text{abs}\ 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

benytter at
det. er lineær i radene.

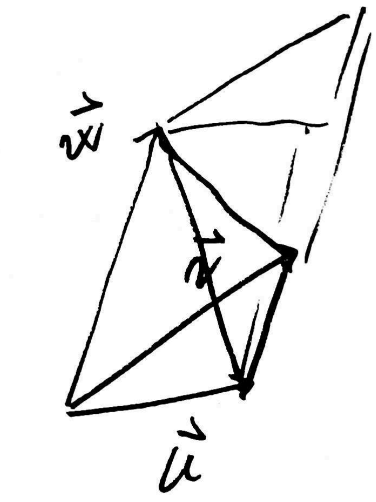
$$= 5\,\text{abs}\left(1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 0 \right)$$

$$5\,\text{abs}\left(3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}}_{7+5} - 2(2) \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}_{-7-5} \right) = 5\,\text{abs}\left(3 \cdot 12 - 4 \cdot (-12)\right)$$

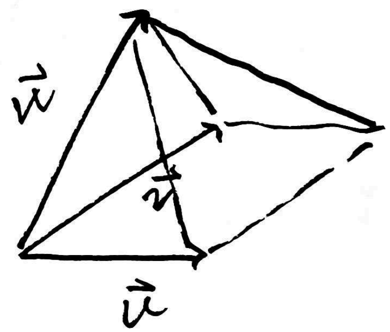
$$\cancel{= 5\,\text{abs}\,(36 + 68) = 5(104) = \underline{520}}$$

$$= 5(3 \cdot 12 + 4 \cdot 12) = 5(3+4) \cdot 12 = 5 \cdot 7 \cdot 12 = 5 \cdot 84$$

$$= 10 \cdot 42 = \underline{420}$$

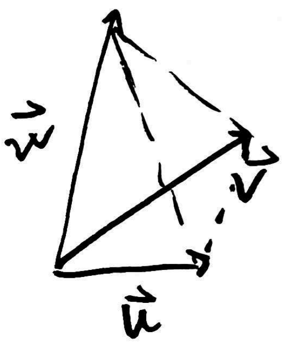


Trekantprisme Volum $V = \frac{1}{2}\left|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}\right|$



Firkantet pyramide

Volum $\frac{1}{3}\left|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}\right|$



Tetraeder

Volum $\frac{1}{6}\left|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}\right|$

oppg Finn volumet til <u>tetraedert</u> utspent av $[2,4,8]$, $[1,-3,4]$ og $[9,-3,6]$.

$$V = \frac{1}{6}\text{abs}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 4 \\ 9 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\text{abs}\begin{vmatrix} 2[1,2,4] \\ 1 \quad -3 \quad 4 \\ 3[3,-1,2] \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\text{abs}\ 2\cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \text{abs}\left(1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \text{abs}\left((\overset{\text{rettet}}{-6} + 4) - 2(2-12) + 4(-1+9)\right)$$

$$= \text{abs}\left(-2 + 20 + \overset{\text{rettet}}{32}\right) = \text{abs}(50) = \underline{50}$$

(Regnet galt i forelesningen. Rettet opp nå)

Øving

12.103

$\vec{p} = [2, a, 6]$ $\qquad$ $\vec{p} \times \vec{q} = [0, 0, 8]$

$\vec{q} = [3, c, d]$ $\qquad$ $\vec{p} \cdot \vec{q} = 4$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 4 \Leftrightarrow 6 + ac + bd = 4 \Leftrightarrow \underline{ac + bd = -2}$$

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & a & 6 \\ 3 & c & d \end{vmatrix} = \left[\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}_{0}, -\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & b \\ 3 & d \end{vmatrix}}_{0}, \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & c \end{vmatrix}}_{8} \right]$$

$\underline{ad = bc}$ $\qquad$ $\underline{2d = 3b}$, $\quad$ $2c - \underline{3a = 8}$

$d = \frac{3}{2}b$

$$\Updownarrow$$

$$a\left(\tfrac{3}{2}b\right) = bc$$

$$\Updownarrow$$

$$3ab = 2cb$$

$$\underline{(\underbrace{3a - 2c}_{-8}) \cdot b = 0} \Leftrightarrow -8 \cdot b = 0 \text{ så } b = 0$$

$$\Rightarrow d = \tfrac{3}{2}b = 0.$$

Gjenstår $ac = -2$ og at $2c - 3a = 8$.

$c = \frac{1}{2}(8+3a)$ setter inn i $ac = -2$

$a\left(\frac{1}{2}(8+3a)\right) = -2 \quad | \cdot 2$

$8a + 3a^2 = -4$

$3a^2 + 8a + 4 = 0.$

$$a = \frac{-8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 \pm \sqrt{4^2 \cdot 4 - 4^2 \cdot 3}}{6}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{4^2}}{6} = \frac{-8 \pm 4}{6} = \frac{-4 \pm 2}{3}.$$

$a = \frac{-6}{3} = -2$ og $c = \frac{1}{2}(8 + 3 \cdot (-2)) = 1$

$a = \frac{-2}{3}$ og $c = \frac{1}{2}\left(8 + 3\left(\frac{-2}{3}\right)\right) = 3.$

Løsningene er

$b = d = 0$, $\underline{a = -2}$ og $\underline{c = 1}$

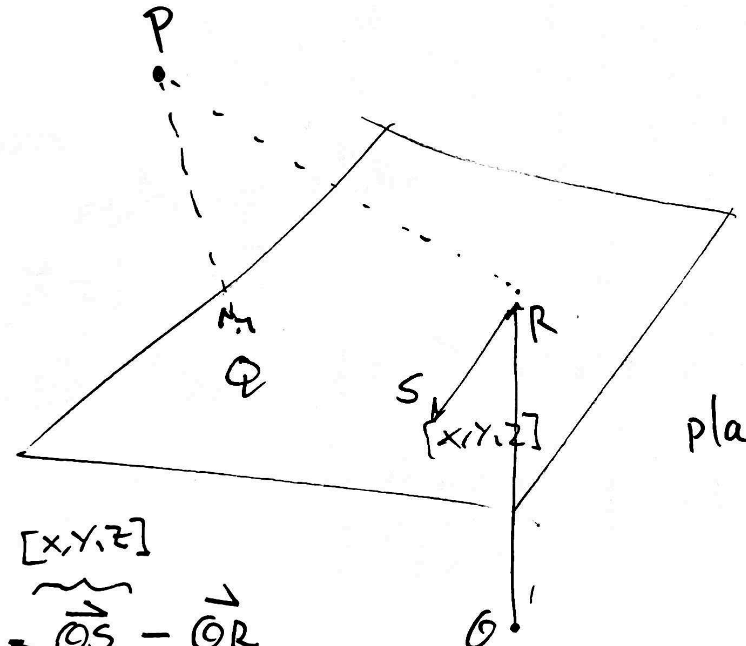
$\underline{b = d = 0}$, $\underline{a = \frac{-2}{3},\ c = 3}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ hva er k og l.

12.101 b)

$\left(\begin{array}{l} l = \vec{a} \cdot \vec{c} \\ k = -\vec{b} \cdot \vec{c} . \end{array} \right)$

oblig 6 #10



Avstanden $|\vec{QP}|$ er minst når $\vec{QP}$ er ortogonal til planet.

planet $-x + 2y - z = 3$

$[-1, 2, -1][x, y, z] = 3$

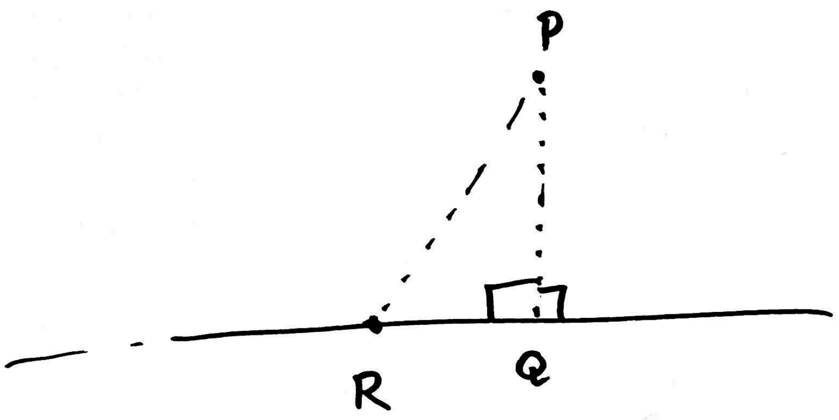
normalvektor til planet

$\vec{RS} = \underbrace{\vec{OS}}_{[x,y,z]} - \vec{OR}$

S ligger i planet $\Leftrightarrow$ $\vec{RS} \perp \vec{n}$ ← normalvektor.

$(\vec{OS} - \vec{OR}) \cdot \vec{n} = 0$

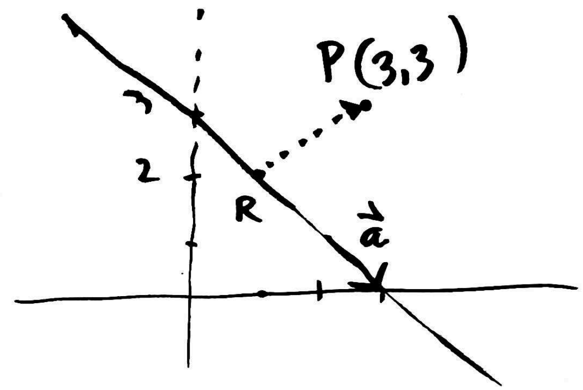
$[x, y, z] \cdot \vec{n} = \vec{OR} \cdot \vec{n}$



$|\vec{RP}| \geq |\vec{QP}|$.

$|\vec{QP}|$ korteste avstand fra P til linjen.

linje —



Linje gjennom
R(1,2) retningsvektor
$\vec{a} = [1,-1]$

$\vec{RP} = \vec{OP} - \vec{OR} = [3,3] - [1,2] = [2,1]$

Korteste avstand $\left| \dfrac{\vec{RP} \times \vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = \dfrac{\text{abs} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\text{abs}(-3)}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{3}{\sqrt{2}} \sim \underline{2.12132\ldots}$