25 feb
26

12G/H Vektorprodukt

__Vektorproduktet__

$\vec{u}, \vec{v}$ 3 vektorer

$\vec{u} \times \vec{v}$ også en 3-vektor
(vektor i rommet $\mathbb{R}^3$)

- kalles også kryssproduktet.

Definisjon:

- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\theta)$

theta (gr.)

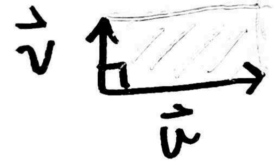
θ vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$
$0 \leq \theta \leq 180°$

- $\vec{u} \times \vec{v}$ ortogonal (vinkelrett) på $\vec{u}$ og $\vec{v}$ og
- $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{u} \times \vec{v}$ er et høyrehandsystem.

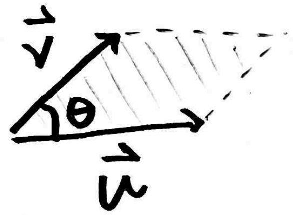
$\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (skjev symmetrisk)

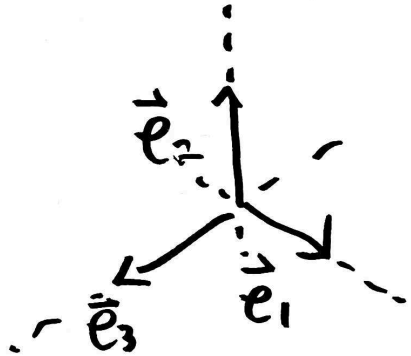
$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$



$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \underbrace{\sin 90^\circ}_{1} = |\vec{u}||\vec{v}|$



$|\vec{u} \times \vec{v}| = \overset{\text{bredden}}{|\vec{u}|} \underbrace{|\vec{v}| \sin\theta}_{=\text{høyden}} =$ arealet til parallellogrammet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$

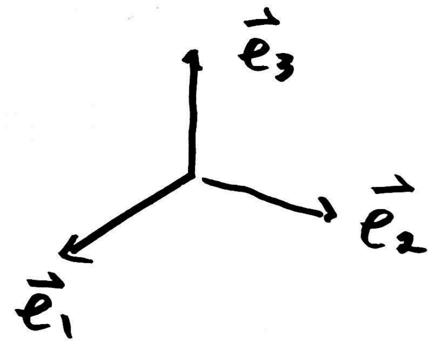


$\vec{e}_1 = [1,0,0]$

$\vec{e}_2 = [0,1,0]$

$\vec{e}_3 = [0,0,1]$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ og $\vec{e}_3$ er et høyrehand-system



$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1$

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$

$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2$

$\vec{e}_i \times \vec{e}_i = \vec{0}$ $\quad i = 1, 2$ og 3.

Vektorproduktet er bilineært

Vi benytter disse egenskapene til å beskrive vektorproduktet på koordinatform. Ser først på:

$$[x_1, x_2, 0] \times [y_1, y_2, 0]$$

$$(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) \times (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2)$$

$$= x_1 \cdot y_1 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1)}_{\vec{0}} + x_2 y_2 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_2}_{\vec{0}} + x_1 y_2 \, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + x_2 y_1 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}_{-\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}$$

$$= (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, \vec{e}_3$$

determinanten til $[x_1, x_2]$ og $[y_1, y_2]$.

Determinanter 12G.

rad

søyle

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4-6 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 0\cdot 7 - 3\cdot 4 = -12$$

egenskaper

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

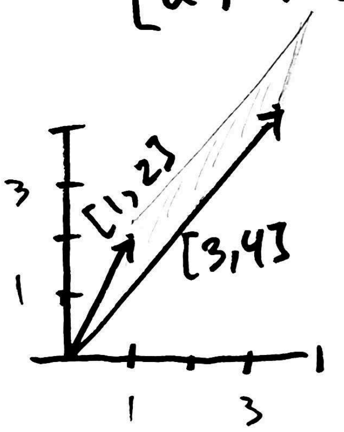
determinanten skifter fortegn ved bytte av radene
bytte av søylene

determinanten er lineær i hver av radene og hver av søylene.

$\text{abs}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = arealet til parallellogrammet utspent av $[a,b]$ og $[c,d]$.

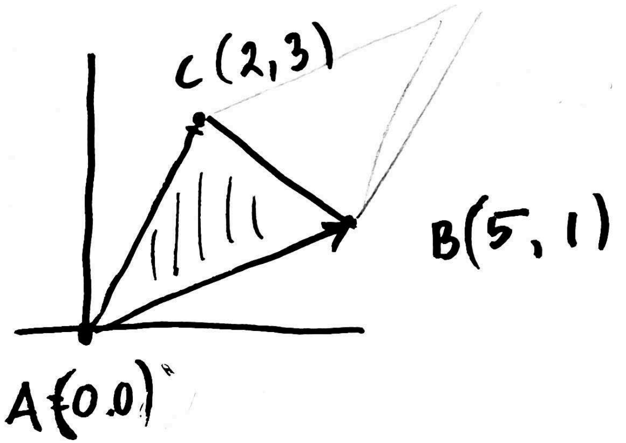
absoluttverdien

$$[a,b,0] \times [c,d,0] = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \left[0, 0, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right].$$



arealet til parallellogrammet er lik

$$\text{abs}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \text{abs}(-2) = \underline{2}$$



Hva er arealet til trekanten?

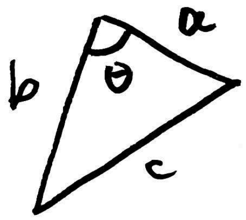
Ved hjelp av $\times$-produktet

$$A = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$$ halvparten av arealet til parallellogrammet

$$= \frac{1}{2} \left| [5,1,0] \times [2,3,0] \right| = \left| \left[0.0, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right] \right|$$

$$= \frac{1}{2} \text{abs} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \right| = \underline{13/2}$$

Hvordan kan vi finne arealet med klassiske metoder?



Heron's formel:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

hvor $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Dette kan utledes som følger: Benytt cosinus-setningen til å finne $\cos\theta$ $\left(= \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}\right)$

Finn deretter $\sin\theta$: $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

arealsetningen $A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ ...

$$[x_1, x_2, x_3] \times [y_1, y_2, y_3] = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \times (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3)$$

$$x_1\vec{e}_1 \times (y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) + x_2\vec{e}_2 \times (y_1\vec{e}_1 + y_3\vec{e}_3) + x_3\vec{e}_3 \times (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2)$$

$$= x_1y_2\,\underline{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2} + x_1y_3\,\underline{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3} + x_2y_1\,\underline{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1} + x_2y_3\,\underline{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}$$
$$+ x_3y_1\,\underline{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1} + x_3y_2\,\underline{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}$$

$$= (x_1y_2 - x_2y_1)\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{\vec{e}_3} + (x_1y_3 - x_3y_1)\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2} + (x_2y_3 - x_3y_2)\underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{\vec{e}_1}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1$$

$$= \underline{\left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right]}$$

pass på!

Eksempel $\underset{\vec{a}}{[1,2,3]} \times \underset{\vec{b}}{[2,3,1]}$

$$= \left[\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [2-9, \; -(1-6), \; 3-4]$$

$$= \underline{[-7, 5, -1]}$$

Sjekker at $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ og $\vec{b}$.

$$\underset{\vec{a}}{[1,2,3]} \cdot \underset{(\vec{a}\times\vec{b})}{[-7,5,-1]} = -7+10-3=0 \checkmark$$

$$[2,3,1] \cdot [-7,5,-1] = -14+15-1 = 0 \checkmark$$

Arealet til parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |[-7,5,-1]| = \sqrt{49+25+1} = \sqrt{75} = \underline{\underline{5\sqrt{3}}}$$

$$[3, 0, -1] \times [0, 3, 4]$$

$$= \left[\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [3, -12, 9] = \underline{3[1, -4, 3]}$$

(sjekker at den er ortogonal til de to vektorene i produktet) ✓

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \overset{\text{typisk}}{\neq} \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$ ikke assosiativt.

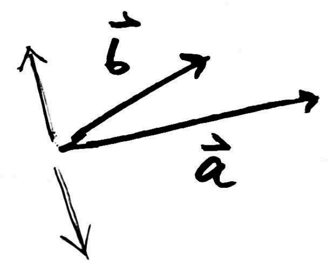
$$\underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}_{\vec{e}_3} \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$$

men $\vec{e}_1 \times \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2)}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{e}_2 \neq \vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) \quad !$$

Øving

oppg. Finn alle vektorer med lengde lik 3 som står vinkelrett på $\vec{a} = [-3,4,5]$ og $\vec{b} = [2,-5,1]$.



$$\vec{a} \times \vec{b} = [-3,4,5] \times [2,-5,1]$$

$$= \left[\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [4-(-25), -(-3-10), 15-8]$$

$$= \underline{[29, 13, 7]}$$

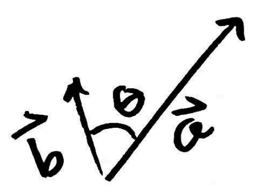
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 2 \cdot 29 + -5 \cdot 13 + 1 \cdot 7 = 58 - 65 + 7 = 0 \checkmark$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |[29,13,7]| = \sqrt{29^2 + 13^2 + 7^2} \approx 32.54$$

$$= \sqrt{1059}$$

$$\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{1059}}[29,13,7].$$ lengde 1. (viskalerer nå med 3 og finner i tillegg også motsatt vektoren)

Løsningene er $\underline{\pm\frac{3}{\sqrt{1059}}[29,13,7]}$.



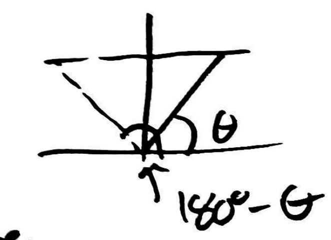
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Det er bedre å benytte skalarproduktet enn vektorproduktet til å finne vinkelen mellom to vektorer.

1. skalarproduktet er enklest å regne ut.
2. $\sin(\theta) = \sin(180° - \theta)$

   så $\sin\theta$ bestemmer θ bare opp til refleksjon om y-aksen

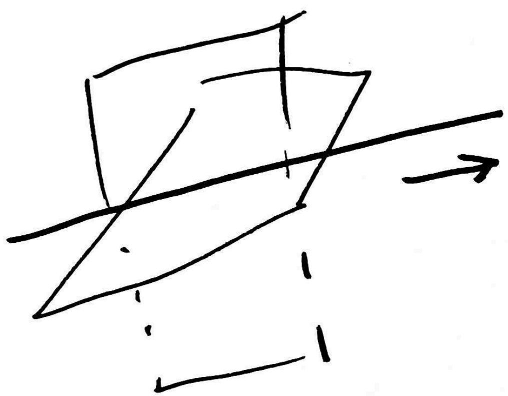


Hvis $\sin\theta = 1/2$, er da $\theta = 30°$ eller $150° (= 180° - 30°)$?

Plan i rommet $ax + by + cz = d$

beskriver dette et plan i rommet med normalvektor $[a, b, c]$.

som går gjennom et punkt (x_0, y_0, z_0) som oppfyller likningen $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$



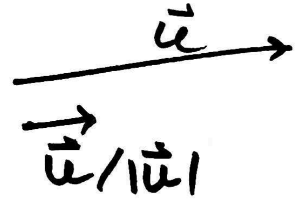
8 a) Vinkelen mellom to plan er lik vinkelen mellom to linjer som står vinkelrett på hvert sitt plan.

(En vinkel i $[0, 90°]$)

$\vec{v}$ er en <u>enhetsvektor</u> hvis $|\vec{v}| = 1$.

$\vec{u} \neq 0$ $\quad \left| \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} \right| = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot |\vec{u}| = 1$.

$\frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ er enhetsvektoren med samme retning som $\vec{u}$



$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{størrelse}}}{\vec{u} = |\vec{u}|} \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ ← retningen.

$\vec{u} = [1, -2, 2]$ $\qquad |\vec{u}| = \sqrt{1+4+4} = 3$.

normaliseringen er : $\frac{1}{3}[1, -2, 2] = \left[\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

$\vec{u} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{størrelse}}}{3} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{retningen.}}}{\left[\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right]}$

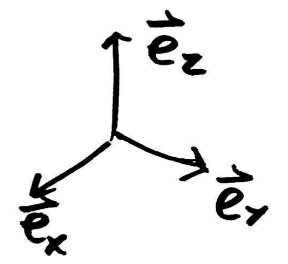
oppg 12.64.

a) $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y$

$= |\vec{e}_x| \cdot |\vec{e}_y| \cos\theta$

$= 1 \cdot 1 \cos(90°) = 0$

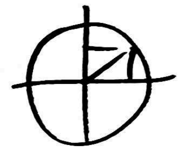
$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$



b) $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = |\vec{e}_x| |\vec{e}_x| \cos(0)$

$= 1 \cdot 1 \cos(0) = 1.$

$(= |\vec{e}_x|^2 = 1)$



$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = 0$

c) $(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_z = 0 \cdot \vec{e}_z = \vec{0}$

d) $\underbrace{(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)}_{|\vec{e}_z|^2} \cdot \vec{e}_z = 1 \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z$

c)* $\underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_y)}_{\vec{e}_z} \times \vec{e}_z = \vec{0}$