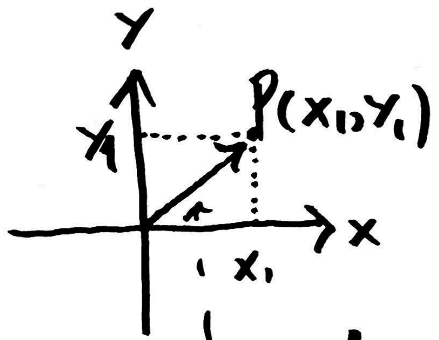
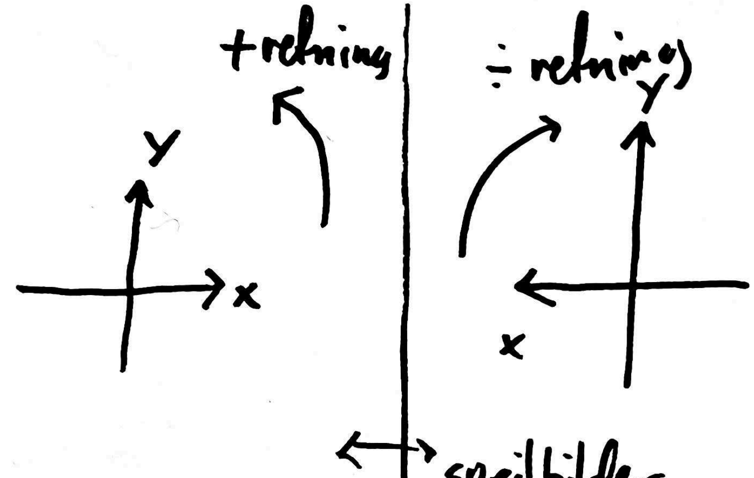
23.02.2026

12 Vektorer
(A-D i $\mathbb{R}^3$)

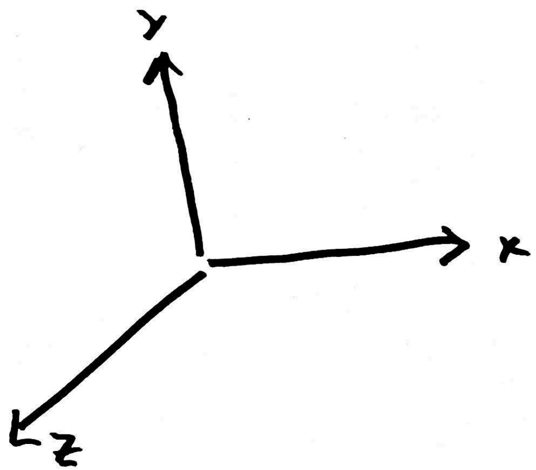


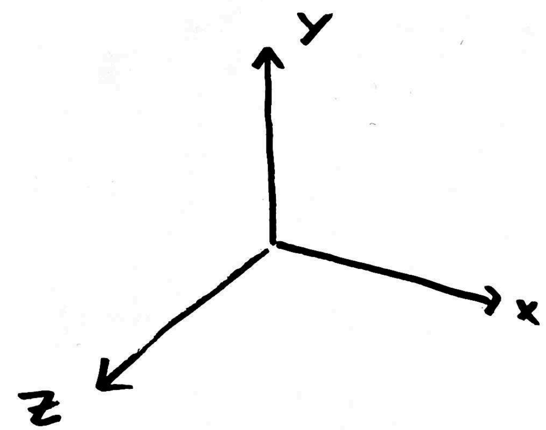
Vektor fra origo til P

$\vec{OP} = [x_1, y_1]$



speilbilder av hverandre.

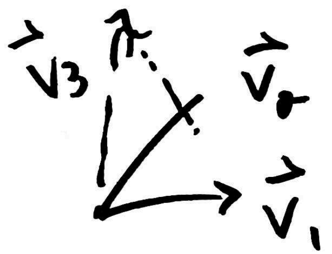




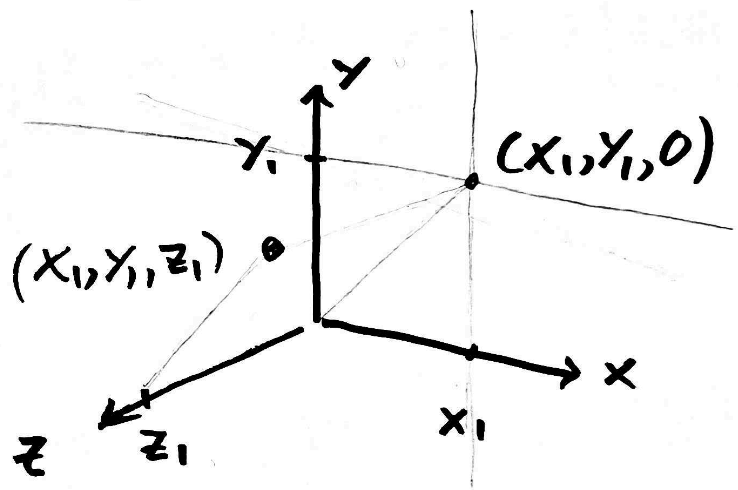
x, y og z-aksene utgjør et høyrehandsystem

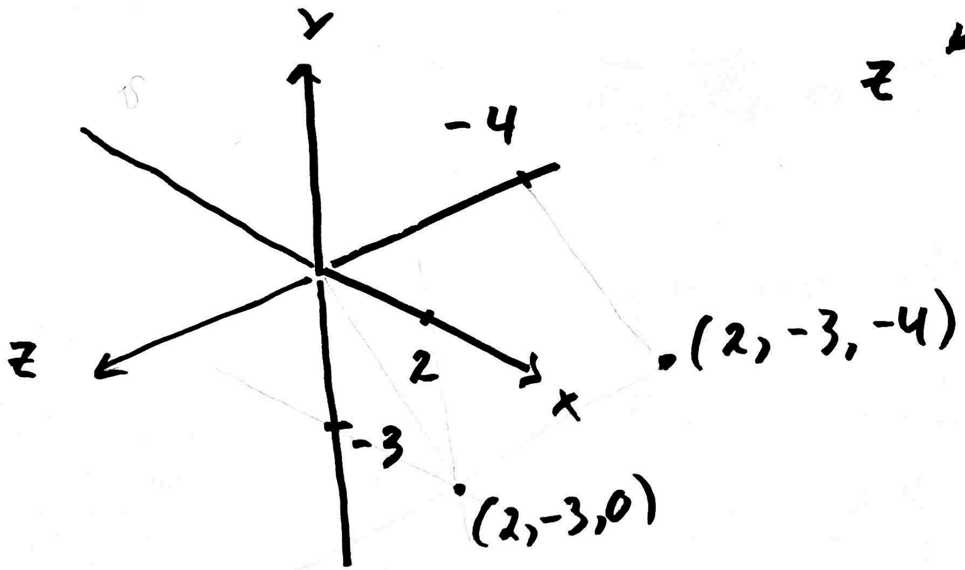
$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ høyrehandsystem

vrir høyre hand fra $\vec{V}_1$ til $\vec{V}_2$ (korteste vei), så skal tommelen peke i retning $\vec{V}_3$ (delen av $\vec{V}_3$ som peker ut av planet utspent av V_1 og V_2)



Koordinater i rommet





$P(x,y,z)$

$$\vec{OP} = [x,y,z] = \underbrace{[x,0,0] + [0,y,0]}_{[x,y,0]} + [0,0,z]$$

$$= x\underbrace{[0,0,1]}_{\vec{e}_1} + y\underbrace{[0,1,0]}_{\vec{e}_2} + z\underbrace{[0,0,1]}_{\vec{e}_3}.$$

$$= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ og $\vec{e}_3$ er en (vektor) basis for $\mathbb{R}^3$

sum og skalarprodukt av 3-vektorer regnes ut komponentvis

$$[x_1, y_1, z_1] + [x_2, y_2, z_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2]$$

$$k[x_1, y_1, z_1] = [kx_1, ky_1, kz_1].$$

$$[1,-1,2] + \underbrace{3[2,1,0]}_{[6,3,0]} = [1+6, -1+3, 2+0]$$

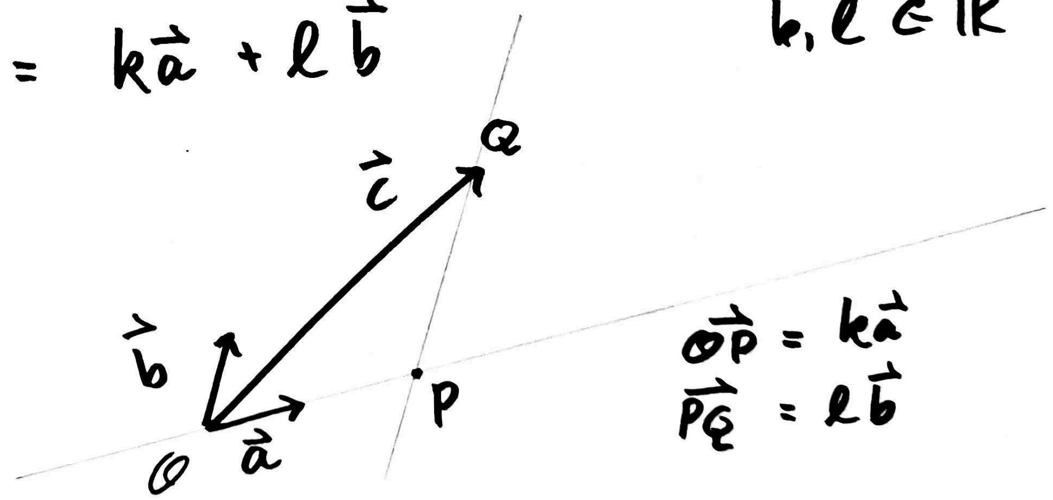
$$= \underline{[7,2,2]}$$

$\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]$ $\qquad$ $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ etc.

(alternativt til $[x, y, z]$)

I planet: $\vec{a}, \vec{b}$ ikke parallelle, da kan enhver vektor beskrives som en lineær kombinasjon av dem:

$$\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b} \qquad k, l \in \mathbb{R}$$

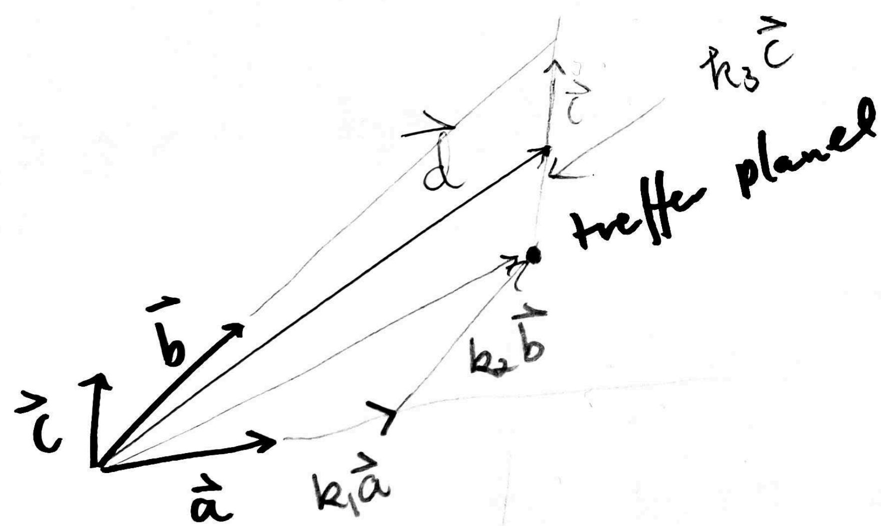


$\vec{OP} = k\vec{a}$
$\vec{PQ} = l\vec{b}$

I rommet: $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ er <u>lineært uavhengige</u> hvis ingen av vektorene er lik en lineær kombinasjon av de to andre.

Det vil si: $k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow k_1, k_2, k_3 = 0$

Lineært uavhengige vektorer i rommet $\Longleftrightarrow$ basiser i rommet.
(De består av 3 vektorer)



eksempler på basiser er standard basise

$\vec{e_1} = [1,0,0]$
$\vec{e_2} = [0,1,0]$
og $\vec{e_3} = [0,0,1]$.

$[1,2,0]$, $[-2,1,3]$ og $[1,1,1]$.

$k_1[1,2,0] + k_2[-2,1,3] + k_3[1,1,1] = [0,0,0]$

(ønsker å vise $k_1, k_2, k_3 = 0$, så vi har en basis)

1. koordinater

$$\begin{aligned} L1 \quad & k_1 - 2k_2 + k_3 = 0 \\ L2 \quad & 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ L3 \quad & 3k_2 + k_3 = 0 \end{aligned}$$

3 likninger
3 ukjente.

L3 gir : $k_3 = -3k_2$

så L1 gir $k_1 - 5k_2 = 0$

L2 $2k_1 - 2k_2 = 0$

så $k_1 = k_2$ og $k_1 = 5k_2$

derfor $4k_2 = 0$

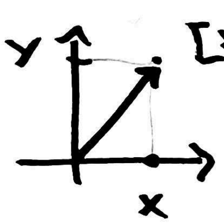
så $k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$ og $k_3 = 0$

vi har en basis

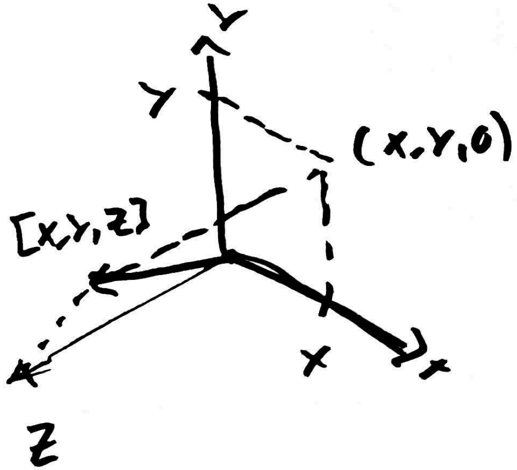
$[1,2,0]$, $[-2,1,3]$, $[1,3,3]$ er ikke en basis
(de er ikke lineært uavhengige vektorer)

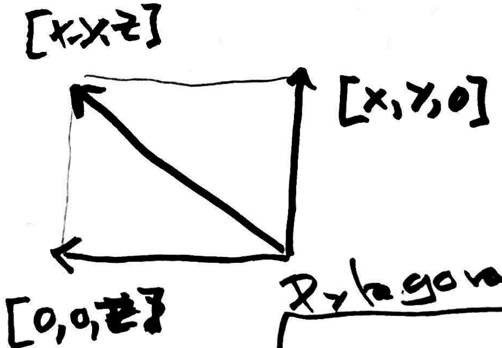
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = 0$$

— Lengden til vektorer i rommet



$$|[x,y]| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{Pytagoras.}$$





Pytagoras

$$|[x,y,z]| = \sqrt{|[0,0,z]|^2 + |[x,y,0]|^2}$$

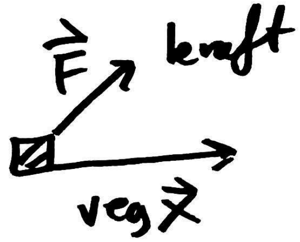
$$= \sqrt{|z|^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \underline{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$|[-2,2,-1]| = \sqrt{(-2)^2+2^2+1^2} = \sqrt{4+4+1} = \underline{3}$$

$$|[1,1,1]| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \underline{\sqrt{3}}$$

Det er 2 produkter for vektorer i rommet:

Skalarprodukt, prikk produktet $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b}$ skalar



arbeid utført $\quad \vec{F} \cdot \vec{x}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos v$$

Kryssprodukt, vektorprodukt $\qquad \vec{a} \times \vec{b}$ vektor.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ høyre hand-system