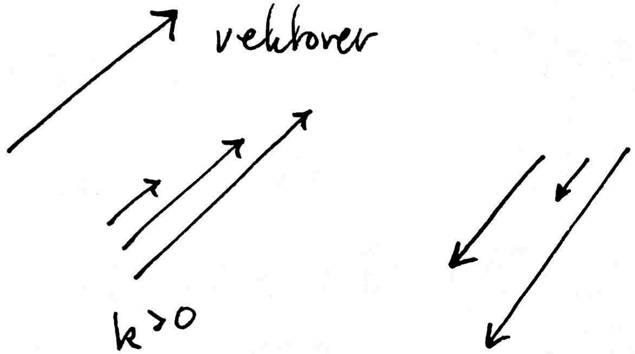
11 feb

26 så langt



vektorer

skalere $k\vec{v}$

$k > 0$

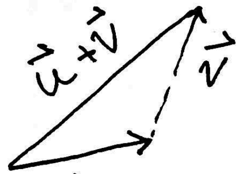
$k < 0$

$\vec{0}$

$k = 0$

addisjon

$\vec{u} + \vec{v}$

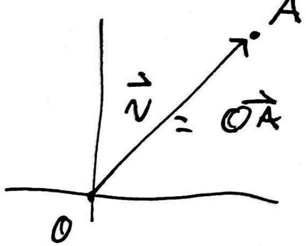


kommutativ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

assosiativ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

$= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

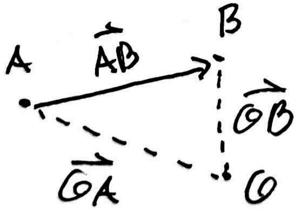
$\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$



A(X,Y) vektorkoordinater

$\vec{OA} = [X, Y]$

punkt $\Leftrightarrow$ vektorer.



$\underline{\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}}$

lengde, størrelse, absoluttverdi, <u>norm</u>

$$|\vec{v}| > 0 \qquad \vec{v} \neq \vec{0} \qquad |\vec{0}| = 0$$

$$|k\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}| \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|.$$

$$|[x,y]| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{euklidske normen.}$$

$\vec{v}$ er en enhetsvektor hvis $|\vec{v}| = 1$

$$|[0.8, -0.6]| = \sqrt{0.8^2 + (-0.6)^2} = \sqrt{0.64 + 0.36} = \sqrt{1} = \underline{1}$$

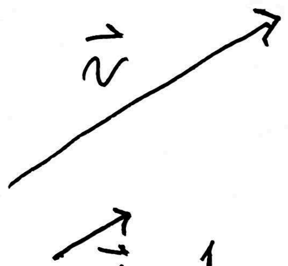
$[0.8, -0.6]$ er en enhetsvektor.

$$|[-12, 5]| = \sqrt{144+25} = 13. \qquad \text{ikke en enhetsvektor.}$$

Når er $k[-12,5]$ en enhetsvektor?

$$|k[-12,5]| = |k|\,|[-12,5]| = |k| \cdot 13 \underset{\text{enhetsvektor}}{=} 1 \qquad |k| = \frac{1}{13}$$

Løsningene $\underline{k = \pm \frac{1}{13}}$.



$\vec{v}$

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{v} = \underbrace{|\vec{v}|}_{\text{størrelsen til } \vec{v}} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad \vec{v} \neq \vec{0}$$

enhetsvektor med samme retning som $\vec{v}$.
"retningen til $\vec{v}$".

$$[-12, 5] = \underbrace{13}_{\text{størrelsen}} \cdot \underbrace{\left[\frac{-12}{13}, \frac{5}{13}\right]}_{\text{retningen}}.$$

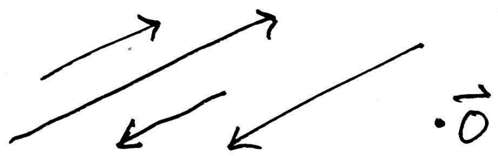
$\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ er normaliseringen til $\vec{v}$.

Oppg. Normaliser $[-1, 1]$

$$|[-1,1]| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Normaliseringen er $\underline{\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$.

12D Parallelle vektorer.

 parallelle vektorer (nullvektoren $\vec{0}$ er parallell til alle vektorer)

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er <u>parallelle</u> vektorer hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har samme retning (normaliseringene er like) eller motsatt retning, eller minst én av dem er null-vektoren.

Alternativt: $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle hvis det finnes en skalar k slik at

$$\vec{u} = k\vec{v} \quad \text{eller} \quad \vec{v} = k\vec{u}.$$

$\vec{v} = \vec{0}$ $\quad k \cdot \vec{v} = \vec{0}$ for alle k. men $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$

$\vec{u}$ er ikke lik $k\vec{v}$

$\vec{u} = [2,3]$ Hvilke av vektorene $[-10,-15]$, $[+1,+1.5]$, $[4,-6]$, $[20,31]$, $\vec{0}$ er parallelle til $\vec{u}$?

* $k[2,3] = [-10,-15]$

  $2k = -10 \quad : \quad -5$

  $3k = -15 \quad : \quad -5$

  $[-10,-15] = -5[2,3]$

  parallelle ✓

* $k[2,3] = [1,1.5]$

  $\frac{1}{2}[2,3] = [1,1.5]$

  parallell ✓

* $k[\cancel{4},3] = [4,-6]$

  $2k = 4 \quad : \quad k = 2$

  $3k = -6 \quad : \quad k = -2$

  ingen løsning

  $[2,3]$ og $[4,-6]$ er ikke parallelle ✓

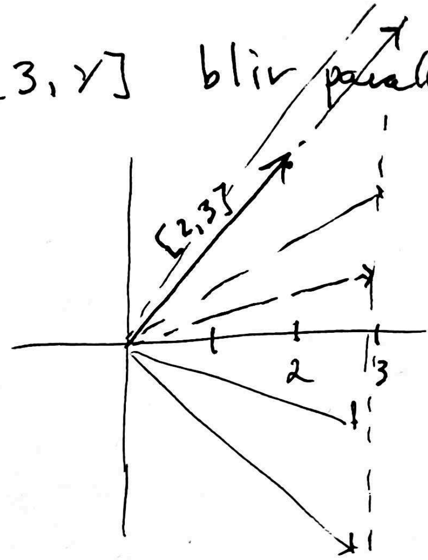
* $k[2,3] = [20,31]$

  $2k = 20 \qquad k = 10$

  $3k = 31 \qquad k = \frac{31}{3} = 10 + \frac{1}{3}$.

  $[2,3]$ og $[20,31]$ er ikke parallell ✓

<u>eks</u> Bestem y slik at $[2,3]$ og $[3,y]$ blir parallelle



$[2,3] \neq \vec{0}$

$k[2,3] = [3,y]$

x-koordinatene $2k = 3$: $k = 3/2 = 1.5$

y-koordinatene $3k = y$ $\quad 3 \cdot 1.5 = y$

$\underline{4.5 = y}$

Løsningen e $\underline{y = 4.5}$. $\quad (1.5[2,3] = [3,4.5])$

Bestem x s.a $[x+1, x]$ og $[2,3]$ blir parallelle.

$k[2,3] = [x+1, x]$

$2k = x+1$

$3k = x$

$2k = 3k+1$

$-1 = 3k-2k = k$

$\underline{k = -1}$

Da e $\underline{x = 3k = -3}$.

(sjekker: $-1[2,3] = [-2,-3] = [-3+1, -3]$ ✓)

Oppg Bestem x slik at $[4,-5]$ og $[x^2, x]$ blir parallelle.

$k[4,-5] = [x^2, x]$

$4k = x^2$ $\qquad \frac{4}{-5} = \frac{x^2}{x} = x$ så $\underline{x = \frac{-4}{5}}$

$-5k = x$ $\qquad$ (når $x \neq 0$) $\qquad$ og $k = \frac{x}{-5} = \frac{4}{25}$.

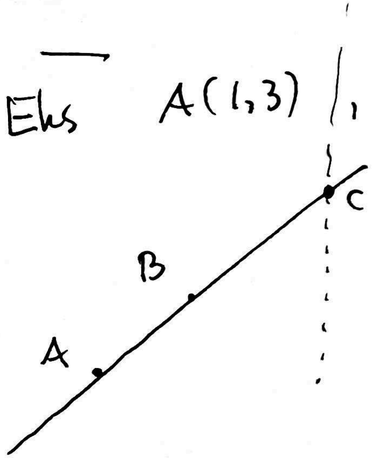
Hvis $x=0$, $\quad 4k=0$ og $-5k=0$, $\quad k=0$.

så $x=0$ er også en løsning.

to løsninger $\quad x=0 \quad \left(0[4,-5] = [0^2, 0] = \vec{0} \right)$

$\underline{x = \frac{-4}{5}} \quad \left(\frac{4}{25}[4,-5] = \left[\left(\frac{-4}{5}\right)^2, \frac{-4}{5}\right] \right)$

Eks $A(1,3)$, $B(3,5)$ bestem x slik at $C(7,x)$, A og B ligge på en rett linje



$\Leftrightarrow \vec{AB}$ og $\vec{AC}$ er parallelle vektorer.

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [3,5] - [1,3] = [2,2]$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [7,x] - [1,3] = [6, x-3]$.

$\vec{AB}$ og $\vec{AC}$ parallelle:

$$k\vec{AB} = \vec{AC}$$

$$k[2,2] = [6, x-3]$$

$$2k = 6 \qquad k = 3$$

$$2k = x-3 \qquad 2 \cdot 3 = x - 3$$

Så $x = 6+3 = \underline{9}$

Løsningen er $\underline{x=9}$

Dekomponering

$\vec{a}, \vec{b}$ ikke parallelle i $\mathbb{R}^2$

Resultat: Enhver vektor $\vec{v}$ i planet er en lineær kombinasjon av $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og det på en entydig måte.

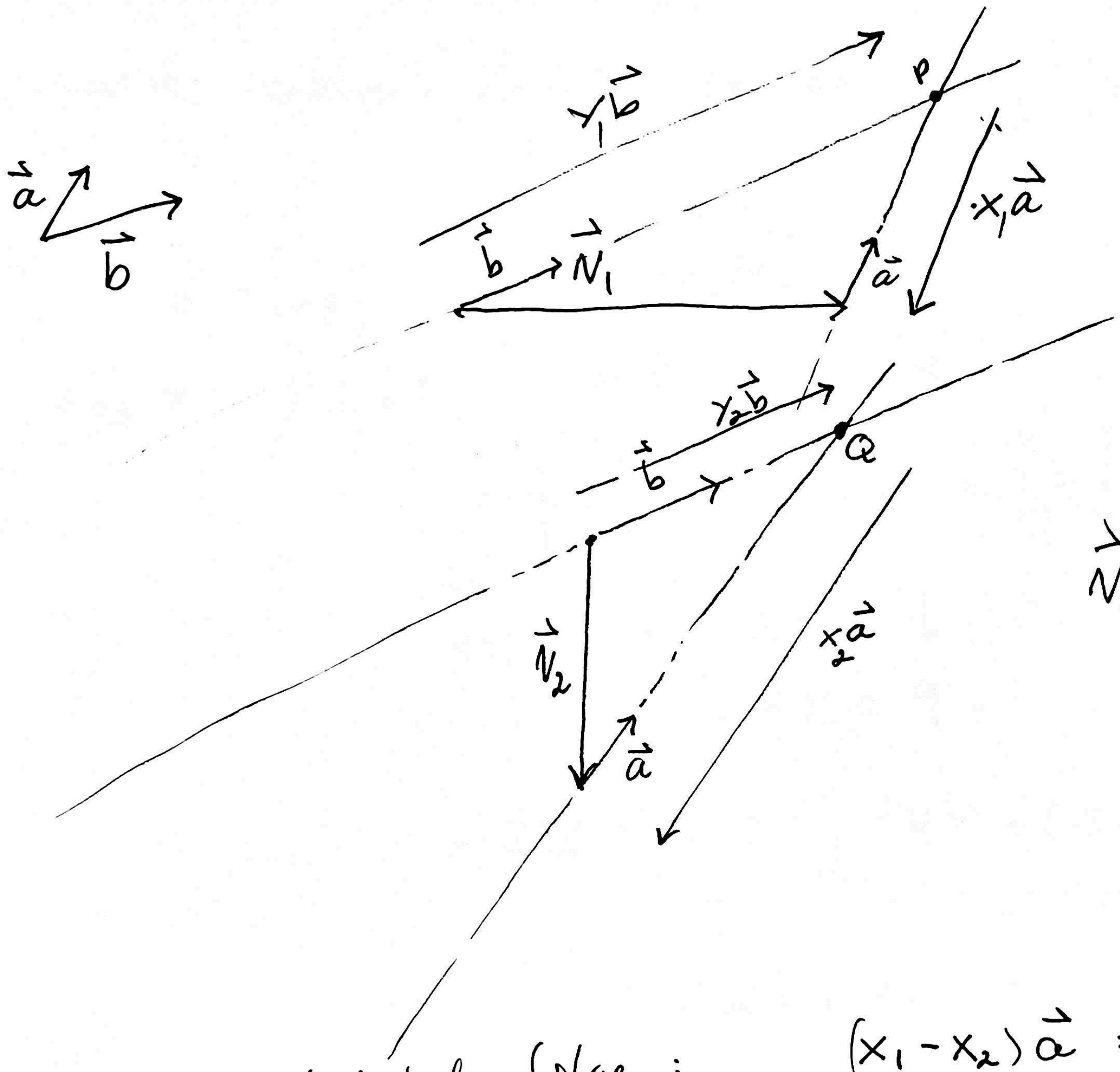
DVS. * det finnes x og y slik at

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{v}$$

* x og y er entydige: $x_1\vec{a} + y_1\vec{b} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$

så må $x_1 = x_2$

$y_1 = y_2$



$$\vec{N}_1 = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$$

$$\vec{N}_2 = x_1\vec{a} + y_2\vec{b}$$

Entydighet følger :

$(x_1 - x_2)\vec{a} = (y_2 - y_1)\vec{b}$

$\vec{a}, \vec{b}$ ikke parallelle $\Rightarrow$

$x_1 - x_2 = 0$ så $x_1 = x_2$

$y_1 - y_2 = 0$ så $y_1 = y_2$

To ikke-parallelle vektorer i planet er en <u>basis</u> for vektorene i planet.

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ikke parallelle.

Finn x og y slik at $x\vec{a} + y\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$ én vektorlikning (dekomponering)

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x - 3y &= 9 \end{aligned}\right\}$$ likningssystem.

$-2L1 + L2$: $-4y + (-3y) = -2 + 9$

$-7y = 7$ så $\underline{y = -1}$

$x = 1 - 2y = 1 - 2(-1) = \underline{3}$.

$\underline{x = 3, \quad y = -1}$

(Sjekk: $3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$. ✓)

Geogebra : 3D calculator

3 dimensjonalt koordinatsystem

⇆ flytte på punkt i xy-retning

Klikk på punktet, det endres da til ↕ flytte på punktet i z-retning.

Nyttige "verktøy"

point
vector
- vector from point
- translate by vector

Oppg $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ (ikke parallelle)

Beskriv $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ som en lineær kombinasjon av $\vec{a}, \vec{b}$.

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{v}$$

$x = 9, y = 2$: $9\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9+8 \\ 18-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \vec{v}$ ✓

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}y = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \iff \begin{aligned} -x + 4y &= -1 \\ 2x - 7y &= 4 \end{aligned}$$

2L1 + L2 gir $8y - 7y = -2 + 4$

$$\underline{y = 2}$$

$$-x + 4 \cdot 2 = -1$$
$$+x = 8 + 1 = 9$$

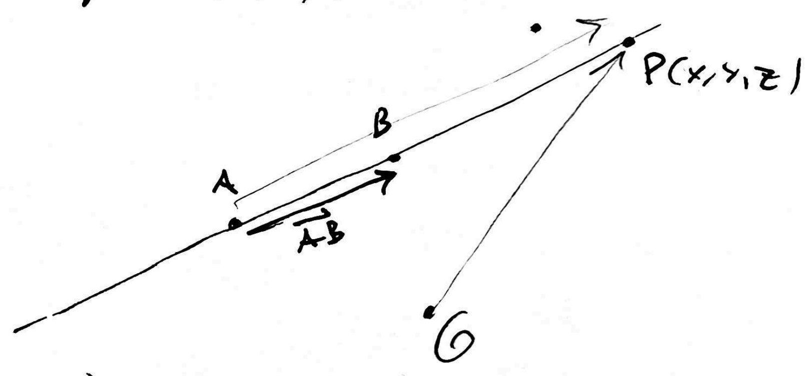
Løsningene er $\underline{x = 9 \text{ og } y = 2}$.

12.54 $A(3,0,0)$ $B(0,-2,0)$ $C(0,0,4)$ og $D(6,2,0)$.

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$[0,-2,0] - [3,0,0]$

$\underline{\vec{AB} = [-3,-2,0]}$



P ligger på linjen gjennom A og B

$\Leftrightarrow \vec{AP} = k\,\vec{AB}$ ($\vec{AP}$ og $\vec{AB}$ er parallelle)

$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = [x,y,z] - [3,0,0] = [x-3,y,z]$.

$k[-3,-2,0] = -k[3,2,0] = [x-3,y,z]$?

* $C(0,0,4)$

$-k[3,2,0] = [-3,0,4]$ $-k\cdot 0 = 0 = 4$ galt

ikke mulig.

$\underline{\text{C ligger ikke}}$ på linjen gjennom A og B.

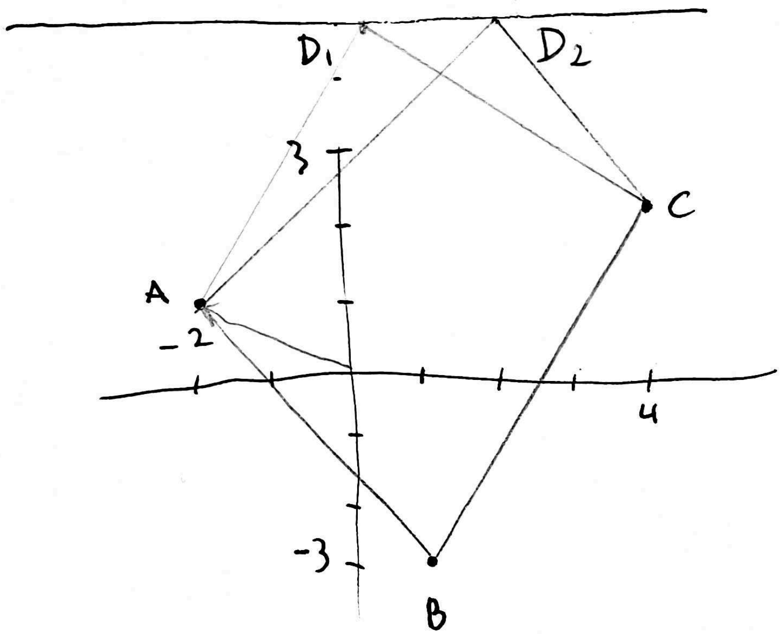
* $D(6,2,0)$.

$-k[3,2,0] = [6-3,2,0] = [3,2,0]$.

$k=-1$ er en løsning.

$\underline{\text{D ligger}}$ på linjen gjennom A og B.

oppg
12.58.



Linjestykket BC
= linjestykket CB

men

Vektor $\overrightarrow{BC}$
er motsattvektor til
Vektor $\overrightarrow{CB}$

1) $AD_1 \parallel BC$

<u>to</u> mulige trapeser.

2) $AB \parallel CD_2$

1) $\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD_1}$

$\overrightarrow{OA} + (-k)\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OD_1}$

D_1 best av at 2-komponenten er lik 5.

...