22 sep
25

4F Irrasjonale likninger

Irrasjonale likninger $\sqrt{x} = 2$ kvadrerer $x = 4$

likninger som involverer røtter.

$\sqrt{x} = -2$ kvadrerer $x = (-2)^2 = 4$
"Falsk løsning"

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{3x-1}$$

$$x+1 = \sqrt{5x-1}$$

$$\sqrt{x} + 1 = \sqrt{3x+1}$$

Ekvivalens mellom likninger

$$a = b \iff a + c = b + c$$

Alternativt: "Stylle over" $\quad a + d = b \iff a = b - d$

$$a + d = b \iff \underbrace{a + d + (-d)}_{0} = b + (-d) \iff a = b - d$$

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ eller } b = 0$$

dele med $d \neq 0$
på begge sider
av likhetstegnet

$$a \cdot d = b \cdot d \iff a = b$$
$$d \neq 0$$

alternativt $\quad a \cdot d = b \cdot d \iff a = b \text{ eller } d = 0$

Eks. $\quad x^2 = 5x \iff \underline{x = 5} \text{ eller } \underline{x = 0}$

$$\frac{x^2-4}{x+2} = 0 \iff x^2-4=0 \text{ når } x+2 \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \pm 2$$

når $x+2 \neq 0 \iff x \neq -2$

Når $x=-2$ så får vi $\frac{0}{0}$, meningsløst. Uttrykket er ikke definert for $x=-2$.

Løsningen er $\underline{x=2}$

$$* \quad \frac{4}{2x-3} + 5 = 2 \iff \frac{4}{2x-3} + \frac{(\overbrace{5-2}^{3})(2x-3)}{2x-3} = 0$$

ikke def. for $x = 3/2$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{4+6x-9}{2x-3} = 0$$

$$\iff 6x-5=0 \iff \underline{x = 5/6}$$

* $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = 1$

$$\frac{(x+3)}{x(x+3)} + \frac{x}{x(x+3)} + \frac{(-1)(x+3)x}{x(x+3)} = 0$$

$$\frac{1}{x(x+3)}\left(x+3 + x - (x^2+3x)\right) = 0$$

$$\sim \cdot (-x^2 - x + 3) = 0$$

Løser $x^2 + x - 3 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1(-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \quad (\neq 0, -3)$$

Løsningene er $\underline{x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}}$.

Irrasjonal likninger.

$a = b \underset{\text{implikasjon}}{\Longrightarrow} a^2 = b^2$ ikke en ekvivalens.

$(-2)^2 = 2^2$

men $-2 \neq 2$.

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a = -b \text{ eller } a = b \Longleftrightarrow a+b = 0 \text{ eller } a-b = 0$$

1. Starter med en likning $a = b$
2. kvadrer begge sider $a^2 = b^2$ (får en enklere likn.)

   alle løsningen til $a = b$ er også løsninger til $a^2 = b^2$

3. Løser $a^2 = b^2$, og sjekker hvilke av løsningene er løsninger til $a = b$.

   Fjerner "falske løsninger"

$\sqrt{2x+5} = 3 \Rightarrow 2x+5 = 3^2 = 9$

$\Leftrightarrow 2x = 9-5 = 4$

$\Leftrightarrow \underline{x = 2}$

sjekker: VS: $\sqrt{2 \cdot 2+5} = \sqrt{9} = 3$ like.

HS: 3

Løsningen er $\underline{2}$

* $x+1 = \sqrt{5x-1} \Rightarrow (x+1)^2 = 5x-1$

$x^2+2x+1-(5x-1) = 0$

$x^2-3x+2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x=1$ og $x=2$.

sjekker

$x=1$: VS: 2 , HS: $\sqrt{5-1} = 2$ ✓

$x=2$: VS: 3 HS: $\sqrt{10-1} = 3$ ✓

Løsningene er $\underline{1 \text{ og } 2}$

"juleprøve 21"

$$\sqrt{2x+6} = x+2 \Rightarrow 2x+6 = (x+2)^2 = x^2+4x+4$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2+2x-2=0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x+1)^2-1^2-2=0$$

$$(x+1)^2=3$$

$$x+1=\pm\sqrt{3}$$

$$x=-1\pm\sqrt{3}.$$

$x_1 \sim 0.73$ og $x_2 = -2.73$

$x_2 = -1-\sqrt{3}$

HS : $x+2 \sim -0.73 < 0$

VS ≥ 0 siden $\sqrt{\sim}$. Falsk

$x_1 = \sqrt{3}-1$

HS : $x_1+2 = \sqrt{3}+1$

VS : $\sqrt{2\sqrt{3}-2+6} = \sqrt{2\sqrt{3}+4}$, begge er positive $\left((\sqrt{3}+1)^2 = (\sqrt{3})^2+1+2\sqrt{3} = 4+2\sqrt{3} \checkmark \right)$

Løsningen er $\underline{\sqrt{3}-1}$

22'

$$x + \sqrt{2x+9} = 5$$

$$\Updownarrow$$

kvadrera

$$\sqrt{2x+9} = 5 - x \Rightarrow 2x+9 = (5-x)^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 12x + 16 = 0$$

abc: $x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4\cdot 1\cdot 16}}{2} = 6 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4^2(3^2-4)}$

$= 6 \pm \frac{4}{2}\sqrt{9-4} = \underline{6 \pm 2\sqrt{5}}$

$x_1 = 6 + 2\sqrt{5} \sim 10.47$ Falsk løsning $x_1 + \sqrt{2x_1+9} \geq x_1 > 5$

$x_2 = 6 - 2\sqrt{5} \sim 1.53$ $1.53 + \sqrt{2\cdot 1.53 + 9} = 5$ ✓ ekke

(vi vet at denne er ekke siden likningen må ha minst én løsning

$x + \sqrt{2x+9} = f(x)$

$f(0) = 3$

$f(x)$ økende

$f(x) > 5$ for x sto.

så $f(x) = 5$ må ha løsning

Løsningen er

$\underline{x = 6 - 2\sqrt{5}}$

$$\sqrt{x}+1 = \sqrt{3x+1}$$ (løsning for $x=0$)

$$\Downarrow \text{ kvadrerer}$$

$$x+1+2\sqrt{x} = 3x+1 \iff 2\sqrt{x} = 3x+1-(x+1) = 2x.$$

$$\Downarrow$$

$$4x = (2x)^2 = 4x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$4x^2 - 4x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$4x(x-1) = 0$$

$$\iff x=0 \text{ og } x=1.$$

$x=0$: $VS = HS = 1$ ✓

$x=1$: $VS = 1+1 = 2$, $HS = \sqrt{3+1} = 2$ ✓

Løsningene er $\underline{x=0 \text{ og } 1}$

8.des 23 Løs $\sqrt{4x-1} = x$.

$$\Downarrow$$

$$4x-1 = x^2 \iff x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(x-2)^2 - (-2)^2 + 1 = 0$$

$$(x-2)^2 = 3$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{3}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$x_1 = 2+\sqrt{3} \sim 3.73$ ekte

$x_2 = 2-\sqrt{3} \sim 0.27$

Løsningene er $\underline{2-\sqrt{3}}$ og $\underline{2+\sqrt{3}}$

* $\sqrt{x} = -2-x$

def. for $x \geq 0$,

Da er $-2-x \leq -2$,

men $\sqrt{x} \geq 0$

så $\sqrt{x}$ og $-2-x$ kan aldrig bli like.

Ingen løsning.

Øving

4.84 a) $(x+4)(2x-3) = (x+4)(x+2)$

Felles faktor.

Vi kan gange ut og så løse den resulterende 2grads likningen.

$(x+4)(2x-3) - (x+4)(x+2) = 0$

$(x+4)(2x-3-(x+2)) = 0$

$(x+4)(x-5) = 0 \iff x = -4$ eller $x = 5$

Løsningene er $\underline{-4 \text{ og } 5}$

b) $(x^2-4x)x = 12x$

alle leddene har felles faktor x.

$x(x^2-4x-12) = 0$

$x(x-6)(x+2) = 0 \iff x=0$, $x-6=0$ eller $x+2=0$

Løsningene er $\underline{-2, 0 \text{ og } 6}$.

c)

$$5x - 3 = (x-1)(x+3)$$
$$= x^2 + 2x - 3$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$

Løsningene er 0 og 3.

Proposjoner

$$\frac{x^2}{x} = 1 = \frac{1}{1}$$

kryssmultiplisere

$$x^2 = x$$
$$x^2 - x = 0$$
$$x(x-1) = 0$$

gyldi når "nevnerne" er ulik 0.

$x = 0$ eller $\underline{x = 1}$.

nevner lik 0

Uttrykket gir ikke mening.

Løsningen.

opg $\sqrt{x+2} = x - 3$

$$\Rightarrow \quad x+2 = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 7x + 7 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{7(7-4)}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7 \cdot 3}}{2}$$

$x_1 = \frac{7 + \sqrt{7 \cdot 3}}{2} > \frac{7}{2} = 3.5$ legge siderpositive : $\underline{\text{Løsning}}$

$x_2 = \frac{7 - \sqrt{7 \cdot 3}}{2} < \frac{7 - \sqrt{16}}{2} = \frac{7-4}{2} = 1.5$ VS > 0, HS < 0 Falsk

Løsningen er $\underline{x = \frac{7 + \sqrt{21}}{2}}$

4.85b) Løs $\frac{x-1}{12x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{4x}$

$$\frac{x-1}{12x} + \underbrace{\frac{1}{3x} - \frac{1}{4x}}_{\frac{4-3}{12x}} = 0$$

$$\frac{x-1}{12x} + \frac{1}{12x} = \frac{x-1+1}{12x} = 0$$

$$\frac{x}{12x} = 0$$

"telleren" er lik null når $x = 0$.
uttrykket gir ikke mening.

Løsningen er $\emptyset$.

4.85 c) $\frac{2x}{x-3} - 1 = \frac{6}{x-3}$ $\quad x \neq 3.$

$$\frac{2x}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} - \frac{6}{x-3} = 0$$

$$\frac{2x-(x-3)-6}{x-3} = 0$$

$$\frac{x-3}{x-3} = 0$$

"teller" $= 0$
når $x = 3$

Ingen løsning