17 sep 25

Likninger

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3} = 1$$

ukjent x

$x \neq -1$ og 3

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3} - 1 = 0$$

slår sammen de rasjonale likningen

$$\frac{x-3}{(x+1)(x-3)} + \frac{x+1}{(x+1)(x-3)} - \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = 0$$

$$\frac{(x-3)+(x+1) - (x^2 - 2x - 3)}{(x+1)(x-3)} = 0$$

telleren lik 0:

$$\Leftrightarrow \quad 2x - 2 - x^2 + 2x + 3 = 0$$

gange med -1

$$-x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$(x-2)^2-(-2)^2-1=0$$
$$(x-2)^2=5$$
$$x-2=\pm\sqrt{5}$$

Løsningene er $\underline{x = 2 \pm \sqrt{5}}$

* $$\frac{1}{2x-1}+x=-2 \qquad x \neq 1/2$$

$$\frac{1+x(2x-1)+2(2x-1)}{2x-1}=0$$

$$\frac{2x^2-x+4x-2+1}{2x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2+3x-1=0$$

abc: $$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

Løsningene er $\underline{\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}}$ dvs $\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$ og $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$

Det gylne snitt
(forhold)

(Golden ration)

$$\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{x}\underbrace{\qquad}_{1-x}}^{1}$$

Forhold $\quad \dfrac{\text{liten del}}{\text{stor del}} = \dfrac{\text{stor del}}{\text{hele}}$.

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$$

Utvider med x

$$\frac{x \cdot x}{x} - \frac{1-x}{x} = 0$$

$$\frac{x^2+x-1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Den positive løsningen er $\underline{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} \sim 0.6180339887$.

Vi observerte i geogebra at $\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$

og $\frac{1}{\varphi}$ er skilt med -1

$\varphi - \frac{1}{\varphi} = -1.$

$\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$ deler med φ

$\varphi + 1 - \frac{1}{\varphi} = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{\varphi} - \varphi\right)$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\varphi - \frac{1}{\varphi} = -1}.$

oblig 1 oppg 13. $\quad x$ har egenskapen

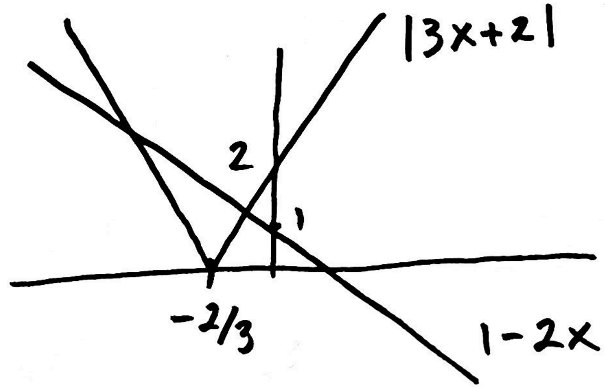
at x og $\frac{1}{x}$ har de samme desimalene

$\Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{x} = n$ (et heltall)

$\Leftrightarrow \quad x^2 - nx - 1 = 0$

Løs denne. (to løsninger for hver n heltall)

$$|3x+2| = 1-2x$$



Deler i to tilfeller.

$3x+2 = 0$ når $x = -2/3$.

$$|3x+2| = \begin{cases} 3x+2 & x \geq -2/3 \\ -(3x+2) & x < -2/3. \end{cases}$$

I

$3x+2 = 1-2x$ for $x \geq -2/3$

$3x+2x = 1-2$

$5x = -1$ så $\underline{x = -1/5}$ (som er $\geq -2/3$)

II

$-3x-2 = 1-2x$ for $x < -2/3$

$-3x+2x = 1+2$

$-x = 3$

$\underline{x = -3}$ (som er $< -2/3$)

Løsningene er $\underline{-3 \text{ og } -1/5}$

eksempel tilsvarende 10.1 og 5

$$\sqrt{2x+1} + 1 = 3$$

$$\sqrt{2x+1} = 3-1 = 2 \ (>0) \text{ kvadrerer}$$

$$\Rightarrow 2x+1 = 2^2 = 4$$

$$2x = 4-1 = 3$$

$$x = \underline{3/2 = 1.5}$$

* $\sqrt{x} = -2 \quad < 0$ så ingen løsning!

$(x = (-2)^2 = 4$ galt!$)$

* $\sqrt{x} = 3\sqrt[4]{x}$ $\qquad \sqrt{x} = (\sqrt[4]{x})^2$

$$(\sqrt[4]{x})^2 - 3\sqrt[4]{x} = 0$$

$$\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} - 3) = 0$$

$\sqrt[4]{x} = 0$ eller $\sqrt[4]{x} = 3$ så Løsningene er

$\underline{0}$, $3^4 = (3^2)^2 = \underline{81}$

alternativt $x^{1/2} = 3x^{1/4} \quad | \cdot x^{-1/4}$ når $x \neq 0$.

$$x^{1/2} \cdot x^{-1/4} = 3 \cdot x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = 3$$

$$x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 3$$

$$x^{\frac{1}{4}} = 3 \qquad \text{opphøyer i 4}$$

$$x = x^{4/4} = 3^4 = \underline{81}.$$

Hva skjer når $x = 0$: $0^{1/2} = 0$

og $3 \cdot 0^{1/4} = 0$

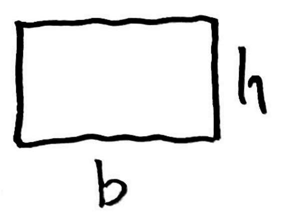
så $x=0$ er også en løsning.

Løsningene er $\underline{0 \text{ og } 81}$

(* $x^2 = x$

$\underline{x = 1}$ og $\underline{x = 0}$)

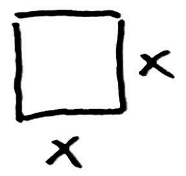
4D



arealet $A = b \cdot h$

$b = \frac{A}{h}$ $\qquad h = \frac{A}{b}$

omkrets $O = 4x$ så $x = O/4$

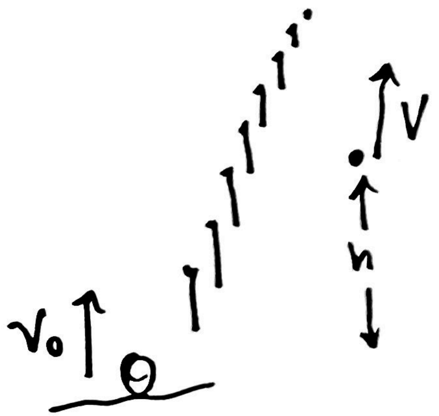


areal: $A = x^2$ $\qquad$ (som likning $x = \pm\sqrt{A}$)

Sidelengden $x \geq 0$

$x = \sqrt{A}$

A uttrykt ved O : $A = (O/4)^2 = \underline{\frac{O^2}{16}}$



$E = \frac{1}{2} m V^2 + mgh = \frac{1}{2} m V_0^2$

$m \neq 0$

$V^2 + 2gh = V_0^2$ Uavhengig av massen.

$V^2 = V_0^2 - 2gh$ $\qquad$ +

$V = \pm\sqrt{V_0^2 - 2gh}$ $\qquad$ ÷

h

Vekt er proporsjonal til h^3

muskel styrke.  proporsjonal til h^2

tverrsnitt

$$\frac{\text{muskelstyrke}}{\text{vekt}} \text{ proporsjonal } \frac{h^2}{h^3} = \frac{1}{h}.$$

Øving

Oblig 1, #4

$$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$$
$$= (n-1)\,n\,(n+1)$$

tre etterfølgende tall

* Hvert fjerde tall er delelig med 4

$$\ldots, 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3, \underset{4(k+1)}{4k+4}, \ldots$$

Annenhvert partall er delelig med 4.

* La $n = 2m+1$ og sett inn...

oblig 1 opg. 1.2 variant: $\sqrt[4]{x^5(-3x)^{-4}/(3x)^{-1}}$

definert for $x \neq 0$

$$x^5(-3x)^{-4}/(3x)^{-1} = \frac{x^5 \frac{1}{(-3)^4 x^4}}{\frac{1}{3x}} \cdot \frac{3x}{3x}$$

$$= \frac{1}{81} \frac{x^5 \cdot 3x}{x^4} = \frac{3}{81} \cdot \frac{x^{5+1}}{x^4} = \frac{1}{27} \frac{x^6}{x^4} = \frac{1}{27} x^2$$

uttrykket er lik $\sqrt[4]{\frac{1}{27} x^2} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} \sqrt[4]{x^2}$

$$= (27)^{-1/4} \sqrt{|x|}$$

$$= \underline{3^{-3/4} \cdot |x|^{1/2}}$$

$\Bigg(\sqrt[4]{x^2} \quad x \geq 0$

$= (x^2)^{1/4}$

$= x^{2/4} = x^{1/2} \Bigg)$

oblig 1 #12

$p(x)$ er delelig med $x-d$

$\Leftrightarrow \quad p(d) = 0$

$$\left(\left(p(x) = S(x)(x-d) + \overset{\text{rest}}{r} \right) \quad x=d \text{ gir } r = p(d) \quad p(x) = S(x)(x-d) + p(d) \right)$$

Variant: Når er $p(x) = x^3 + x^2 - 3a$ delelig med $x+a$?

$p(x)$ er delelig med $x+a = x-(-a)$

$\Leftrightarrow \quad p(-a) = 0$

$$p(-a) = (-a)^3 + (-a)^2 - 3a = -a^3 + a^2 - 3a$$

$$= \underline{a(-a^2 + a - 3) = 0}$$

$\Leftrightarrow \quad a = 0$ eller $-(a^2 - a + 3) = 0$ (ingen løsning)

diskriminanten er $(-1)^2 - 4\cdot1\cdot3 = \underline{-11 < 0}$

Løsningen er $\underline{a=0}$ (da er $p(x) = x^3 + x^2 = x^2(x+1)$)

5. Varianter

*

$$\underbrace{(3x+6)}_{3(x+2)}x - 2(x+2)$$

$$= (x+2)(3x - 2) = \underline{(x+2)(3x-2)}$$

*

$$(x+2)^2 - 5x^2$$

$5 = (\sqrt{5})^2$

$$= (x+2)^2 - (\sqrt{5}x)^2$$ konjugatsetningen

$$= (x+2+\sqrt{5}x)(x+2-\sqrt{5}x)$$

$$= \underline{((1+\sqrt{5})x+2)((1-\sqrt{5})x+2)}$$

$(x+p)(x+q)$
$= x^2 + (p+q)x + p \cdot q$

*

$$x^2 - 10x + 21$$

$$= (x-3)(x-7)$$

"ser" siden
$3+7=10$
og $3 \cdot 7 = 21$

$$(x+1)(2x-3) + (x+2)^2$$

$$2x^2 + 2x - 3x - 3 + x^2 + 4x + 4$$

$$= 3x^2 + 3x + 1$$

Finner røttene (dvs. løsningene til $3x^2+3x+1=0$)

abc formelen: $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3} = \dfrac{-3\pm\sqrt{-3}}{6}$

ingen reelle løsninger.

Så $\underline{3x^2+3x+1}$ er faktorisert mest mulig.

2

Tverrsummen er summen av sifrene til et naturlig tall

13789 har tverrsum $1+3+7+8+9 = 28$ som har tverrsum 10 som har tverrsum 1.

$10 = 1+9 \qquad 100 = 1+99 = 1+9\cdot 11$

$1000 = 1+999 = 1+9\cdot 111$ etc

$10^n - 1$ er delelig med 9.

$$10^n = 1 + \overbrace{9\cdots 9}^{n} = 1 + 9\cdot \underbrace{1\ldots 1}_{n}.$$

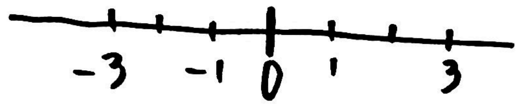
$$273 = 2\cdot \overbrace{100}^{1+99} + 7\cdot \overbrace{10}^{1+9} + 3$$

$$= 2+7+3+(2\cdot 99 + 7\cdot 9)$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|5| = 5$

$|-9| = 9$



$x = -3$ da er $x = -3$ negativ

$-x = -(-3) = 3$ er positiv

dlig 1
7.4

$$x^4 + 16 = (x^2)^2 + 4^2$$

$$= (x^2+4)^2 - 2 \cdot 4 \cdot x^2$$

$$= (x^2+4)^2 - (2\sqrt{2}x)^2 \quad \text{konjugatsetning}$$

$$= \underline{(x^2+4+2\sqrt{2}x)(x^2+4-2\sqrt{2}x)}$$

kan ikke faktoriseres mer.

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$