20 aug 25

1D Implikasjon, ekvivalens

Påstander (utsagn)

$x > 2$ sant for $x = 3$, galt for $x = 1$

$x + 1 > x$ sant for alle $x \in \mathbb{R}$

$x^2 < 0$ galt for alle $x \in \mathbb{R}$

A, B to påstander

$A \Rightarrow B$ A implisener B

hvis B er sann når A er sann

Dette er det samme som $B \Leftarrow A$.

$A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow A$ da er A sann hvis og bare hvis B er sann

Vi sier da at A og B er ekvivalente $A \Leftrightarrow B$

$x > 2 \quad \Leftarrow \quad x > 5$

$x = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4$

ikke en ekvivalens

fordi $(-2)^2 = 4$

$x \cdot y = 0 \quad \Leftarrow \quad x = 0$

ikke en ekvivalens

siden $x=3$ og $y=0$:

$3 \cdot 0 = 0$

$x = 2$ eller $x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4$

$x \cdot y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ eller $y = 0$

($2 = 3$ altid galt $\quad \Rightarrow \quad 2 > 3$ galt)

$\cancel{4 \Leftrightarrow 3+1}$ meningsløst

$x=4 \Leftrightarrow 3+1=x$ gir mening.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$A \subset B$ det vil si : $x \in A \Rightarrow x \in B$.

$\{x, 3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Leftarrow x = 2$

(også sant for $x = 1, 2, 3, \ldots, 6$)

OG (AND)

logikk : $\wedge$

A AND B

A \ B	S	F
S	S	F
F	F	F

Eller (OR)

logikk $\vee$

A \ B	S	F
S	S	S
F	S	F

Negering $(\neg A)$

NOT(A)

A	S	F
$\neg A$	F	S

$$\frac{1}{8} = 0.125000 = \underline{0.125}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10}\underbrace{\left(\frac{10}{8}\right)}_{1+\frac{2}{8}} = \frac{1}{10}\left(1+\frac{2}{8}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\left(\overbrace{\frac{10\cdot 1}{4}}^{5/2}\right)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{100}\left(2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{10} + 2\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{10}\frac{1}{100}\cdot\underbrace{\frac{10}{2}}_{5}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + 2\cdot\frac{1}{100} + 5\cdot\frac{1}{1000}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{10}\cdot\frac{10}{7} = \frac{1}{10}\left(1+\frac{3}{7}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\underbrace{\left(\frac{30}{7}\right)}_{\frac{4\cdot 7+2}{7}} = 4+\frac{2}{7}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{100}\left(4+\frac{2}{7}\right) = 0.14 + \frac{1}{100\cdot 10}\underbrace{\left(\frac{20}{7}\right)}_{\frac{2\cdot 7+6}{7}} = 2+\frac{6}{7}$$

$$= 0.14 + \frac{1}{1000}\left(2+\frac{6}{7}\right)$$

$$= 0.142 + \frac{1}{1000\cdot 10}\overbrace{\left(\frac{60}{7}\right)}^{\frac{7\cdot 8+4}{7}} = 0.142 + \frac{1}{10000}\left(8+\frac{4}{7}\right)$$

$$\frac{1}{7} = 0.\underbrace{142857}_{\text{gjenta.}}\,142857\ldots \qquad \frac{7\cdot 5+5}{7} = 5+\frac{5}{7}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{7} = \cdots &= 0.1428 + \frac{1}{100\,000}\left(\frac{40}{7}\right)\\ &= 0.1428 + \frac{1}{10^5}\left(5+\frac{5}{7}\right)\\ &= 0.14285 + \frac{1}{10^6}\left(\frac{50}{7}\right)\\ &= 0.142857 + \frac{1}{10^6}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)\end{aligned} \qquad \frac{7\cdot 7+1}{7} = 7+\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{7} = 0.\underline{142857}$$

← betyr at sifrene gjentas

$$\frac{1}{3} = 0.\underline{3}$$

$\frac{m}{n}$ $\overset{1}{*}$ har en endelig desimal ekspansjon (bare 0 i desimalene etter hvert)

$\overset{2}{*}$ har en gjentagende desimal ekspansjon
sifferrekken som gjentas har lengde $\leq n-1$

Alle desimaltall med endelig desimal ekspansjon er rasjonale tall (med nevner 10^m for en m)

$x = 14.271$

$$1000 \cdot x = 14271$$
$$x = \frac{14271}{10^3}$$

Resultat: Et desimaltall med (etter hvert) gjentagende desimaler er lik et rasjonalt tall.

$1.27565656\ldots = 1.27\underline{56}$ er et rasjonalt tall.

Skisse for et Python program som skriver en brøk som desimaltall

```
t = 13
n = 83
N = 20          # antall desimaler.
h = t//n
t = t%n         #   t < n
print(h, end=".")
for x in range(N):
    h = t*10//n
    t = t*10%n
    print(h, end="")
```

$X = 0.123123123\ldots$ (gjentagende)

$= 0.\underline{123} = 123 \cdot 0.001001001 = 123 \cdot 0.\underline{001}$

Hva er $0.\underline{001}$?

$0.9999\ldots = 0.\underline{9} = 1$

$999 \cdot 0.\underline{001} = 0.\underline{999} = 1$

så $0.\underline{001} = \frac{1}{999}$

Derfor er $0.\underline{123} = 123 \cdot \frac{1}{999} = \frac{41}{333}$

$\overbrace{99\ldots9}^{n} \cdot 0.000\ldots0\underset{\substack{\uparrow \\ \text{n-te posisjon}}}{1} = 0.\underline{9} = 1$

$0.00\ldots0\underset{\substack{\uparrow \\ \text{n-te posisj.}}}{1} = \frac{1}{\underbrace{99\cdots9}_{n}}$

$$0.12454545\ldots = 0.12\underline{45}$$

$$= 0.12 + 0.00\underline{45}$$

$$= \frac{12}{100} + \frac{1}{100}\, 0.\underline{45} = \frac{12}{100} + \frac{1}{100} \cdot 45 \cdot 0.\underline{01}$$

$$= \frac{12}{100} \cdot \frac{99}{99} + \frac{45}{100} \cdot \frac{1}{99} = \frac{1}{100 \cdot 99} (\underbrace{12 \cdot 99}_{1200-12} + 45)$$

$$= \frac{1}{99 \cdot 100} (1233) = \underline{\frac{1233}{9900}}$$

Oppg

Skriv som et rasjonalt tall (brøk) hvis mulig

$$0.1\underline{34} = 0.1343434\ldots$$

$$0.1\underline{34} = 0.1 + \frac{1}{10} \cdot \underbrace{0.\underline{34}}_{34 \cdot 0.\underline{01}}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot 34 \cdot \frac{1}{99} = \frac{99 + 34}{990} = \underline{\frac{133}{990}}$$

$\Rightarrow$ implikasjon

$A \Rightarrow B$ hvis A er sann så er også B sann

$A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow A$ skriver $A \Leftrightarrow B$ og sier at A og B er ekvivalente.

$$a + b = c \iff a = c - b$$

$$\Big(\; \underbrace{a + b + (-b)}_{0} = c + (-b) \; \Big)$$

$$a \cdot b = c \text{ og } B \neq 0 \iff a = c/b$$

$$a \cdot b \cdot \frac{1}{b} = c \cdot \frac{1}{b}$$

$B \neq 0$ og $a \cdot B = c \cdot B \iff a = c$ (og $B \neq 0$)

$2x + 5 = 3$

Løsningene til likningen er x som gjør påstanden sann

$$2x + 5 = 3 \iff 2x = 3 - 5 = -2$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\tfrac{1}{2} \cdot 2\right) \cdot x = \tfrac{1}{2}(-2)$$

gangar med $\frac{1}{2}$ på begge sider av likhetstegnet

$$x = 1 \cdot x = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x = -1$$

$2x + 5 = 3$ er sann hvis og bare hvis $x = -1$,

så løsningen er $\underline{x = -1}$.

$7x + 15 = 19$ legger til -15 på begge sider av likhetstegnet

$7x + (15 - 15) = 19 - 15$

$7x = 4$ ganger med $1/7$ på begge sider...

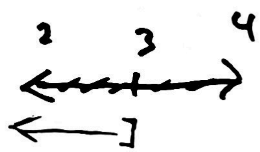
$x = \frac{1}{7} \cdot 7x = \frac{1}{7} \cdot 4$

$x = \frac{4}{7}$

$x = 3$

$\Swarrow \qquad \Searrow$

$x \in \langle 2, 3] \Rightarrow x \in \langle 2, 4\rangle$



$x \in \langle \leftarrow, -2]$ $\Leftrightarrow$ $x \leq -2$

oppg $x \leq -3$ $\boxed{\Rightarrow}$ $x \in \langle -\infty, -1]$

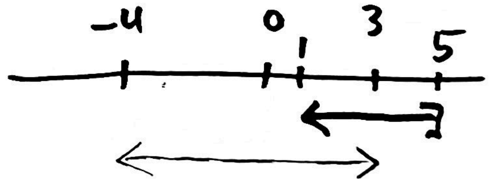
(samme som $\langle \leftarrow, -1]$)

$\Updownarrow$

$x \leq -1$

oppg $x \in \langle 1, 5]$ $\boxed{}$ $-4 < x < 3$

ingen relasjon



Tilsvarende 1.12 iboka.

$x \in \langle \leftarrow, 2] \iff x \leq 2$

$y \in \langle -3, \infty \rangle \iff y > -3$

$\iff -3 < y$

$z \in \langle -2, 3] \iff z > -2$ og $z \leq 3$

$\iff -2 < z$ og $z \leq 3$

$\iff -2 < z \leq 3$

dobbel ulikhet

1.43 f) $x = 2$ $\boxed{\Rightarrow}$ $x \in \mathbb{N}$

sant bare for $x = 2$ — sant for alle $x = 1, 2, 3$ etc.

g) $x > 5$ $\boxed{\Leftarrow}$ $x = 6$