18 aug 25

1A Mengder og reelle tall

En mengde er en samling elementer

$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$3 \in M$

$m \in M$ "m er et element i M".

$n \notin M$ "n ikke er et element i M".

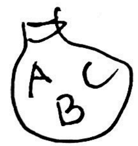
$7 \notin M$

$K = \{\{3,4\}, \{\{2,1\}, 5\}, a, 7\}$

$N = \{A, B, C\}$

$N = \{B, A, C\}$

elementene har ikke en rekkefølge



$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
vendelig mengde

$7 \in K$

$3 \notin K$

$\{3,4\} \in K$

$\{2,2,2,9\} = \{2,9\}$

Den tomme mengden $\emptyset = \{\ \}$ mengden med ingen elementer

Russels: Paradoks

$M =$ mengden av alle mengder som ikke inneholder seg selv. (ikke mulig!)

A, B mengder

$A \subset B$ "A inneholt i B" eller "A er en <u>delmengde</u> av B

Alle elementer i A er også elementer i B.

$\{1,3,5\} \subset \{1,2,3,4,5\} = M$

$A = B$ hvis $A \subset B$ og $B \subset A$ A og B har de samme elementene.

$(\subseteq\ ,\ \not\subseteq)$

$N = \{4,5,6,7\}$

M og N ikke er delmengder av hverandre

A, B mengder $(\subset C)$

Snittet av A og B: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ og } x \in B\}$

slik at

Unionen av A og B: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$

(og)

$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{b, c, d, e, f\}$

$D = \{a, c, e, g\}$

$A \cap B = \{b, c, d\}$ og $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$A \cap B \cap D = \{c\}$

A, B delmengder i C.

Komplementet til A i C: $\bar{A} = A^c = C \setminus A$

$(= \{x \mid x \in C \text{ slik at } x \notin A\})$

$= \{x \in C \mid x \notin A\}$

La nå $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$\bar{A} = C \setminus A = \{e, f, g, h\}$

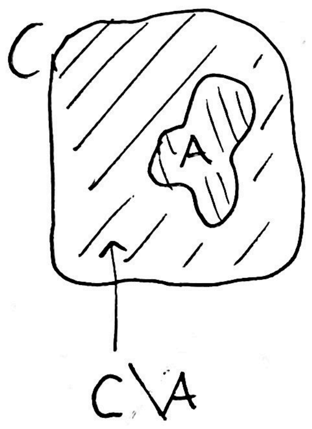
$C \setminus B = \{a, g, h\}$.

A, B hvis $A \cap B = \{\} = \emptyset$ sier vi at A og B er <u>disjunkte</u> mengder

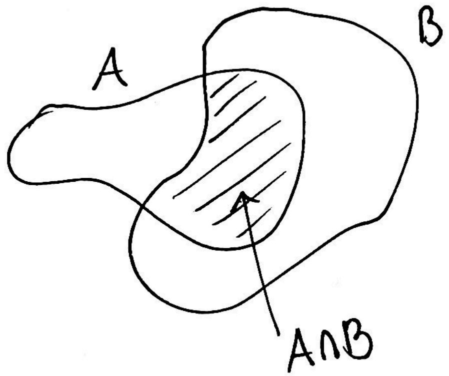
A, $C \setminus A$ er disjunkte og $A \cup (C \setminus A) = C$

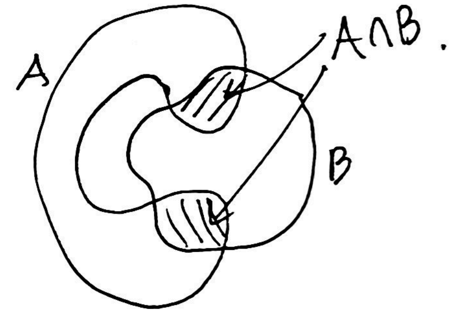
C er mengden av punkt i planet innenfor den lukka kurva

Venn diagram.

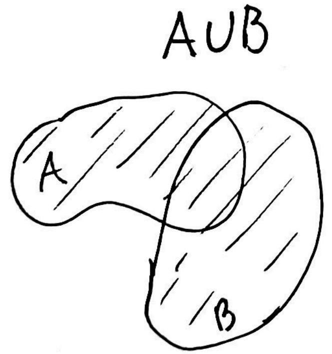


Snitt





Union

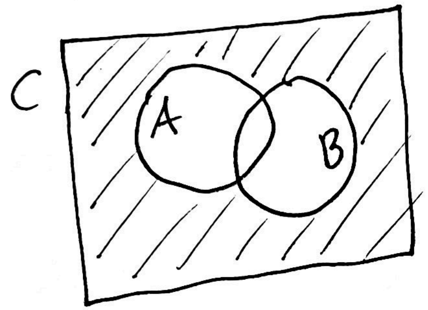


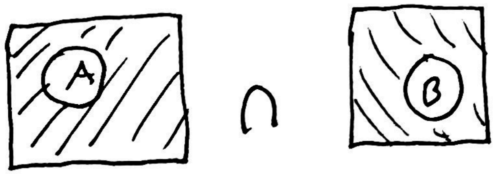
$A, B \subset C$

$\bar{A} = C \setminus A$

komplement

$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

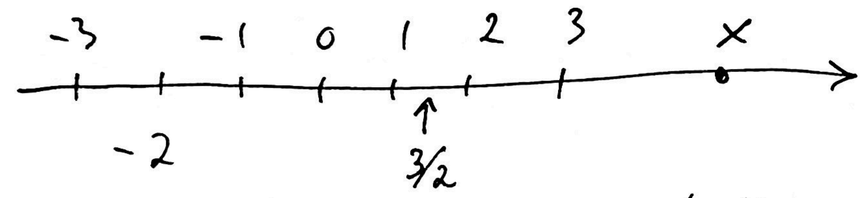




$\bar{A}$ $\bar{B}$

$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$

Reelle tall $\mathbb{R}$



svarer til punkt på tallinjen.

Desimaltall

$$21{,}567 = 21 + 5\cdot 10^{-1} + 6\cdot 10^{-2} + 7\cdot 10^{-3}$$

desimalskilletegn.

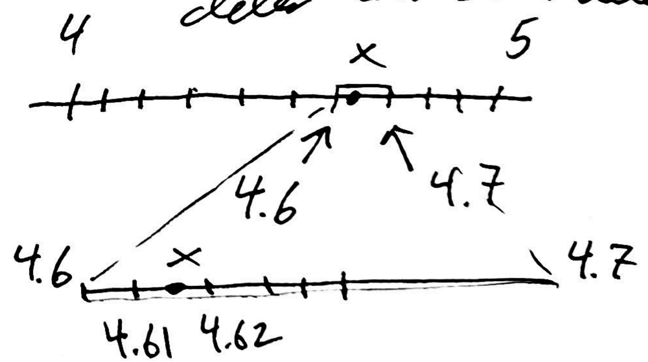
$$= 21 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000}$$

Endelige desimaltall er rasjonale tall (brøktall)

$$21{,}567 = \frac{21567}{1000}.$$

eng: 21.567 point.

dele [4,5] i ti-deler



etc

4.615 så 4.6157 ...

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = 0.\underline{3}$$

$$= 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots \quad (\text{"Uendelig sum"})$$

$$0.99\ldots = 1$$

to ulike desimtall representerer samme reelle tall.

$$1 - 0.\overbrace{999\ldots9}^{n}$$

$$= 0.\underbrace{000\ldots0}_{n-1}1 = 10^{-n}$$

(differansen nærmer seg 0 når n vokser)

$$2.472999\ldots = 2.473$$

$\mathbb{R}$ er mengden av de ~~xxx~~ reelle tallene

$$\mathbb{R} \supset \underbrace{\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}}_{\text{tellbare}}$$

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$\mathbb{R}$ er ikke tellbar.

Absoluttverdi
(tallverdi)

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

abs(x)

$|0| = 0$

$|4| = 4$

$|-7| = 7$

$$|-x| = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{når} & x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{når} & x-2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-2 & \text{når} & x \geq 2 \\ 2-x & \text{når} & x < 2 \end{cases}$$

$|x+y| \leq |x| + |y|$

$|4+(-7)|$ men $|4| + |-7|$

$|-3| = 3$ $\quad = 4+7 = 11$

Ulikheter og likheter

$2+3 = 5$ like

$4 \neq 5$ ulike

$2 < 3$ "a er mindre enn b"

samme betydning $\begin{cases} a < b \\ b > a \end{cases}$ "b er større enn a"

$2 < 3$ ekte mindre enn (tillater ikke likhet). (eller mindre enn eller lik.)

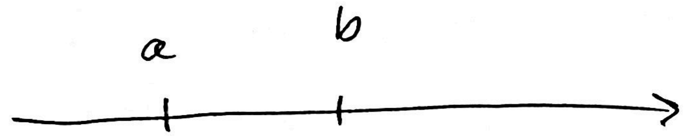
mindre enn eller lik

$2 \leq 3$

$2 \leq 3$

$2 \leqq 3$

$2 \lneq 3$ ekte mindre enn



$a < b$ a til venstre for b

$a + 2 = b$ ekvivalen til $a + 2 + c = b + c$

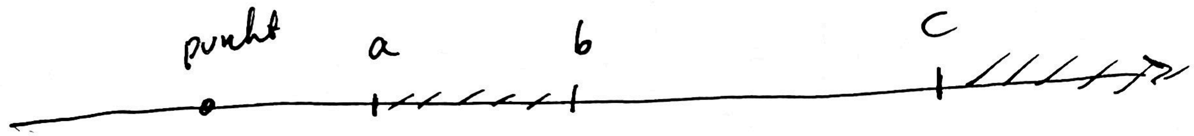
$c = -2$

$$a + \underbrace{2 - 2}_{0} = b - 2$$

$$a = b - 2$$

"vi har flyttet 2 over på andre siden og snudd fortegnet"

Reelle intervaller (sammenhengende delmengder)



$[x,x] = \{x\}$

$[a,b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$ lukka intervall

$\langle a,b\rangle = (a,b) = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$ åpen intervall

$[a,b\rangle = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r < b\}$ halvåpne

$\langle a,b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a < r \leq b\}$ intervaller

$[c,\infty\rangle = [c,\rightarrow\rangle = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq c\}$ lukka

$\langle c,\infty\rangle = \langle c,\rightarrow\rangle = \{r \in \mathbb{R} \mid r > c\}$ åpen

tilsvarende

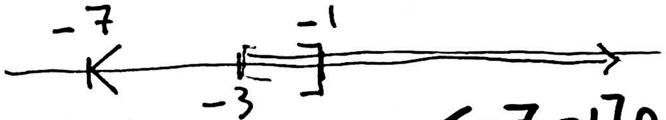
$\langle -\infty, c] = \langle \leftarrow, c]$

$\langle -\infty, c\rangle = \langle \leftarrow, c\rangle$

$\langle -\infty, \infty\rangle = \mathbb{R}$

$\langle 1, 4] \cup [4, 11\rangle = \langle 1, 11\rangle$

$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x < 11\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 11\}$



$x \in \mathbb{R}$

$\langle -7, -1] \cup [-3, \infty\rangle = \langle -7, \infty\rangle$

$\langle -7, -1] \cap [-3, \infty\rangle = [-1, -3]$

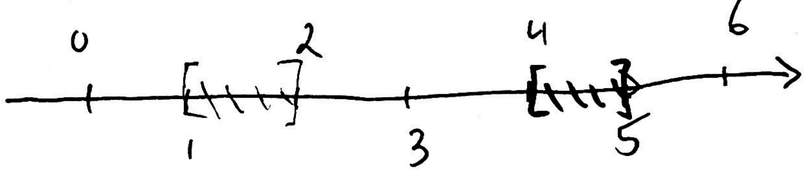
oppg

$\mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$

Mengde A

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

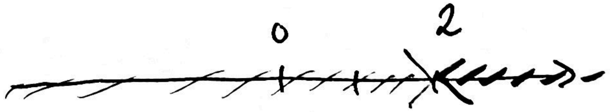


$x \in [1, 2] \cup [4.5]$

$1 \leq x \leq 2$ eller $4 \leq x \leq 5$.

$[1, 2] \cap [4, 5] = \emptyset$

alternativt :



$\langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$
$= \underline{\mathbb{R} \setminus \{2\}}$

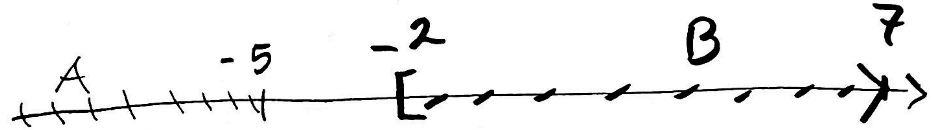
$\langle -\infty, 2\rangle \cap \langle 2, \infty\rangle$
$= \emptyset$

$A = \langle -\infty, -5]$

$B = [-2, 7\rangle$

$\overline{A} = \mathbb{R} \setminus A = \langle -5, \infty \rangle$

$\overline{B} = \mathbb{R} \setminus B = \langle -\infty, -2 \rangle \cup [7, \infty \rangle$



$A = \{ \emptyset, 2, \{1,2,3\}, A \}$

Er $3 \in A$ Nei

$\{2\} \subset A$ Ja

$\{\emptyset, A, 2\} \subset A$ Ja

$\{1,2,3\} \subset A$ Nei, det er et element i A $\{\{1,2,3\}\} \subset A$ og $\{1,2,3\} \in A$

$\{2,3\} \in A$ Nei

$2 \subset A$ Nei, men $2 \in A$

ikke en mengde.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

oppgaver.

$|-13| = 13$

$|-7+5| = |-2| = 2$

$|-7| - |-3| = 7 - 3 = 4$

$|x|$ når $x = 4$ $\quad |4| = 4$

$x = -3$ $\quad |-3| = 3.$

#16

$\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{7}{11}$ hvem er størst?

$= \frac{3\cdot 11}{5\cdot 11} = \frac{33}{55}$ og $= \frac{7\cdot 5}{11\cdot 5} = \frac{35}{55}$

så $\frac{3}{5} < \frac{7}{11}$.

$$\left(* \quad \frac{7}{11} - \frac{3}{5} = \frac{35}{55} - \frac{33}{55} = \frac{2}{55} > 0 \quad \text{så } \frac{7}{11} > \frac{3}{5} \right)$$

$$-\frac{3}{4} < \frac{0}{5} = 0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5} < \frac{7}{11}.$$

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \frac{21-20}{35} = \frac{1}{35} > 0 \quad \text{så } \frac{4}{7} < \frac{3}{5}. \right)$$

1 * Hvilke er størst av $\frac{7}{15}$ og $\frac{31}{64}$

2 * Hva er $|x+3|$ for $x=-5$, $x=-2$ og $x=0$

$|-5+3| = |-2| = 2$

$|-2+3| = |1| = 1$

$|0+3| = 3$

---

1 $\frac{7}{15} - \frac{31}{64} = \frac{7 \cdot 64 - 31 \cdot 15}{15 \cdot 64} = \frac{448-465}{15 \cdot 64} < 0$

$7 \cdot 64 = 7 \cdot (60+4)$
$= 420 + 28 = 448$

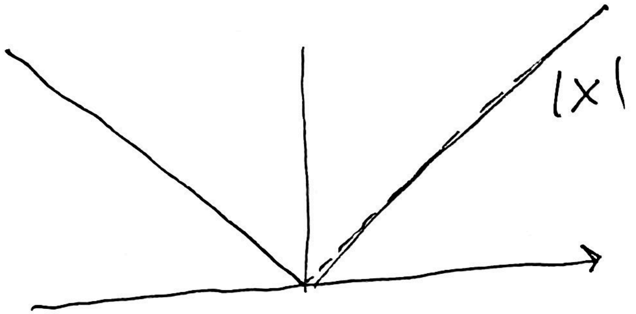
og

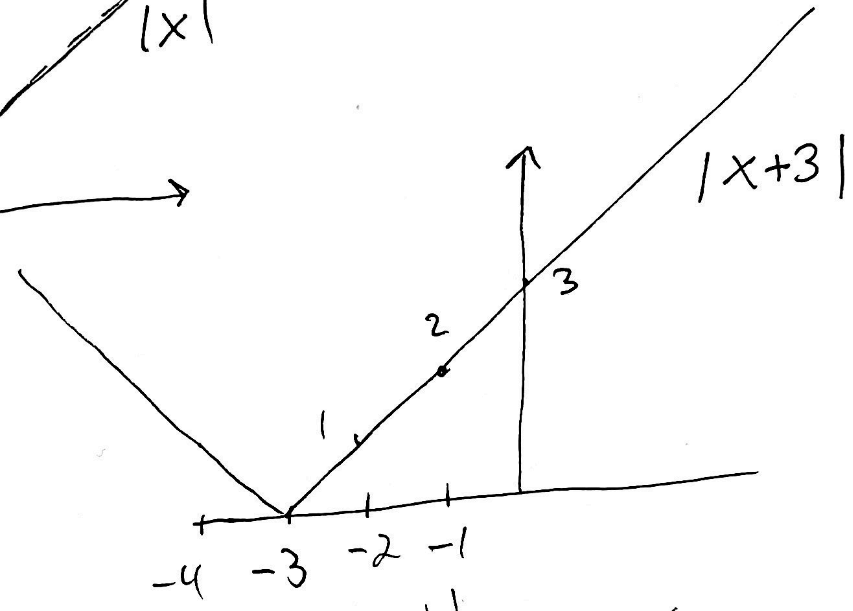
$31 \cdot 15 = (30+1) \cdot 15$
$= 450 + 15 = 465$

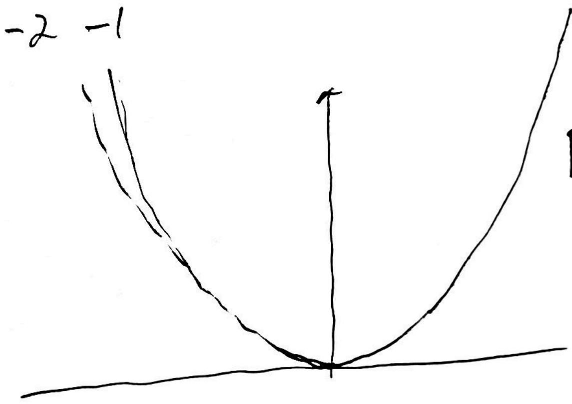
så $\underline{\frac{31}{64} > \frac{7}{15}}$

Grafen til

$y = |x|$







$y = x^2$

parabel

$|x|^2 = x^2$

$|x|^3 = |x| \cdot x^2 = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$