13. august 25

Forholdstall $\mathbb{Q}$

Heltall $\mathbb{Z}$ $\quad \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$0 + a = a + 0 = a$ $\quad$ 0 additivt identitetselement

$(-n) + n = 0$

additiv invers til n.

$-x$ $\quad x = 2 : -x = -2$

$x = -3 : -x = -(-3) = 3.$

m er en multiplikativ invers til n

hvis $\quad m \cdot n = 1$

1 enhetselementet for multiplikasjon $\quad 1 \cdot m = m \cdot 1 = m.$

I $\mathbb{Z}$ er det bare (-1) og 1 som har multiplikativ invers.

$1 \cdot 1 = 1 \qquad (-1)(-1) = 1.$

Utvider $\mathbb{Z}$ slik at alle tall ulik 0 får mult. invers.

Innfører: $\frac{1}{n}$ s.a. $\frac{1}{n} \cdot n = 1$. $\quad \frac{n}{n} = 1$ for alle $n \neq 0$

"Nye tall" $\quad m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$

Brøk $\frac{m}{n}$ ← teller ← brøkstrek ← nevner $\qquad \frac{2}{3} \qquad 2/3$

Utvider regneregler for rasjonale tall slik at ~~regn~~ egenskapene til + og × til $\mathbb{Z}$ bevares.

(Innfører vi invers til 0, blir alle tallene like.

$$\frac{1}{0} \cdot 0 = 1$$

$a \cdot 0 = 0$ for alle a $\qquad$ ($a(\overbrace{b+0}^{b}) \overset{\text{dist}}{=} a \cdot b + a \cdot 0$

$$a \cdot b = a \cdot b + a \cdot 0$$

så $a \cdot 0 = ab - ab = 0$

$$0 = \frac{1}{0} \cdot 0 = 1$$

$$a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$$

Alle tall blir lik 0)

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{m \cdot n}$$

$$(m \cdot n) \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = \left(m \cdot \frac{1}{m}\right) \cdot \left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

så $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}$ er mult. invers til $m \cdot n$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot \left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = (a \cdot m) \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{n}\right) = \frac{a \cdot m}{b \cdot n}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \underbrace{\overset{\xrightarrow{\text{utvida brøken}}}{\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}}}_{\xleftarrow{\text{forkorte brøken}}}$$

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} \underset{=}{\xleftarrow{\text{utvide}}} \frac{2}{3} \underset{\xleftarrow[\text{forkorte}]{=}}{\xrightarrow{\text{utvide}}} \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

To brøker representerer samme rasjonale tall hvis vi kan forkorte og utvide det ene til det blir like det andre

$$\frac{6}{18} = \frac{6}{6\cdot 3} = \frac{6}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$\frac{m}{n}$ m, n ingen felles faktorer,

Da kan ikke $\frac{m}{n}$ forkortes mer.

Alle rasjonale tall svarer til én forkorta brøk med positiv nevner.

$$-\frac{m}{n} = \frac{-m}{n} = \frac{m}{-n}$$

$$(-1)\frac{m}{n} = (-1)\cdot m\cdot\frac{1}{n} = \frac{-m}{n} \overset{\text{utvide}}{=} \frac{(-1)(-m)}{(-1)\cdot n} = \frac{m}{-n}.$$

$$-\frac{4}{7} = \frac{-4}{7} = \frac{4}{-7}.$$

$$n = \frac{n}{1} \qquad \left(n = n\cdot\big(\underbrace{1\cdot\tfrac{1}{1}}_{1}\big) = n\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = \frac{n}{1} \right)$$

$$3\cdot\frac{4}{7} = \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{7} = \underline{\frac{12}{7}}.$$

Finn $\frac{13}{18} \cdot \frac{15}{39} = \frac{13 \cdot 15}{18 \cdot 39} = \frac{13 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 13}$

$= \underbrace{\frac{3}{3}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{13}{13}}_{1} \cdot \frac{5}{18} = \underline{\frac{5}{18}}$

$\frac{m}{n} = m \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$ har multiplikativ invers $\frac{1}{m} \cdot n = \frac{n}{m}$

$\left(m \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} \cdot n = m \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \cdot n = 1\right)$

invers til $\frac{2}{7}$ er $\frac{7}{2}$ $\qquad \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{7}{7} = 1.$

$\frac{1}{m/n} = \frac{1}{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m}.$

Brudden brøk: "brøk av brøker"

$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{7}} = \frac{2}{3} \cdot$ inversen til $\frac{4}{7}$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 3}$

$= \frac{7}{2 \cdot 3} = \underline{\frac{7}{6}}$

En <u>ekte brøk</u> er en brøk mellom 0 og 1 (ekte)

$$0 \leq \frac{a}{b} < 1.$$

$$\frac{m}{n} = \text{heltall} + \text{ekte brøk.}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{1+6}{3} = \underline{\frac{1}{3} + 2}$$

$$-\frac{7}{3} = -\left(\frac{1}{3}+2\right) = \frac{-1}{3} - 2 = \left(\frac{-1}{3}+1\right) - 1 - 2$$

$$= \frac{2}{3} - 3$$

↑ ekte brøk.

Addisjon

$$2(a+b) = 2a + 2b \qquad m(a+b) = ma + m \cdot b.$$

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = (1+4) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \underline{\frac{5}{6}}$$

felles nevner 6

Sum av brøker: 1) Finner felles nevner
2) Legger sammen tellerne.

$20 = 4\cdot 5$
$15 = 3\cdot 5$

$$\frac{7}{20} + \frac{4}{15}$$
$$= \frac{7}{20}\cdot\frac{3}{3} + \frac{4}{15}\cdot\frac{4}{4} = \frac{21}{60} + \frac{16}{60} = \underline{\frac{37}{60}}$$

oppg

$$\frac{21}{28} + \frac{7}{12} = \frac{3\cdot 7}{4\cdot 7} + \frac{7}{12} = \frac{3}{4} + \frac{7}{12}$$
$$= \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} + \frac{7}{12} = \frac{9}{12} + \frac{7}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4\cdot 4}{4\cdot 3} = \underline{\frac{4}{3}}$$

oppg

$$4 - \frac{23}{7} = \frac{4}{1} - \frac{23}{7} = \frac{4\cdot 7}{7} - \frac{23}{7} = \frac{28}{7} + \frac{-23}{7}$$
$$= \frac{28-23}{7} = \underline{\frac{5}{7}}$$

Oppg Hvem av tallene $\frac{12}{25}$ og $\frac{7}{15}$ er størst ?

$$\frac{12}{25} - \frac{7}{15} = \frac{12 \cdot 3}{25 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 5}{15 \cdot 5} = \frac{36 - 35}{75} = \frac{1}{75} > 0$$

$$\frac{12}{25} > \frac{7}{15}.$$

Rasionale tall $\mathbb{Q}$ representert av $\frac{m}{n}$ $n \neq 0$

Alle rasjonelle tall ulik null har mult. invers.

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Potenser $\quad a^n = \overbrace{a \cdots a}^{n} \qquad n \in \mathbb{N}.$

utvider til $n \in \mathbb{Z}$ slik at

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

potensreglene fortsatt er gyldige

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$$

så $\underline{a^0 = 1}$

Negativ n

$$a^{-1} \cdot a^1 = a^{-1+1} = a^0 = 1$$

$$a^{-1} \cdot a = 1.$$

så $\underline{a^{-1} = \frac{1}{a}}$ mult. invers til a

og $\underline{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$5^{-2} = (5^{-1})^2 = (5^2)^{-1}$$
$$= \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

$$3^2 \cdot 3^7 \cdot 3^{-4} = 3^{2+7-4} = \underline{3^5}$$

$$\begin{aligned} \frac{5^3}{5^4 \cdot 5^{-7}} &= 5^3 \cdot \frac{1}{5^4} \cdot \frac{1}{5^{-7}} \\ &= 5^3 \cdot (5^4)^{-1} \cdot (5^{-7})^{-1} \\ &= 5^3 \cdot 5^{-4} \cdot 5^7 \\ &= \underline{5^6} \end{aligned}$$

ØVING

#12

$$\frac{21}{35} + \frac{24}{56} = \frac{3\cdot 7}{5\cdot 7} + \frac{3\cdot 8}{7\cdot 8}$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{7} + \frac{3}{7}\cdot\frac{8}{8}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{3}{7} = 3\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)$$

$$= 3\left(\frac{7}{5\cdot 7} + \frac{5}{5\cdot 7}\right) = \frac{3}{5\cdot 7}(7+5)$$

$$= \underline{\frac{36}{35}} = 1 + \frac{1}{35}$$

#14.

$$4\cdot\frac{3}{5} = 4\frac{3}{5}$$ (betyr ikke : 4 hele pluss $\frac{3}{5}$ $4+\frac{3}{5}$)

$$4\frac{7}{8} + \frac{5}{-6} = 4\cdot\frac{7}{8} + \frac{5\,(-1)}{-6\,(-1)} = \frac{4\cdot 7}{8} + \frac{-5}{6}$$

$$= \frac{4\cdot 7}{4\cdot 2} + \frac{-5}{6} = \frac{4}{4}\cdot\frac{7}{2} + \frac{-5}{6} = \frac{7}{2} + \frac{-5}{6} = \frac{7\cdot 3}{2\cdot 3} + \frac{-5}{6}$$

$$= \frac{21-5}{6} = \frac{16}{6} = \frac{2\cdot 8}{2\cdot 3} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

#14 $$\frac{23}{45} + \frac{24}{72} = \frac{23}{45} + \frac{6}{18} = \frac{23}{45} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{23}{3\cdot 15} + \frac{1}{3}\cdot\frac{15}{15}. = \frac{23+15}{3\cdot 15} = \underline{\frac{38}{45}}$$

#13 $$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{7}} = \left(\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{7}{3} = \frac{1\cdot 7}{3\cdot 5} = \underline{\frac{7}{15}}$$

$\frac{2}{\frac{3}{4}}$ problematish !

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} \quad \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{3\cdot 4}$$

$$= \underline{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} \quad \frac{2}{\left(\frac{3}{4}\right)} = 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3}.$$

#15 analog

$$\frac{10^6\cdot 2^{-4}}{5^7}$$

$$10^6 = (2\cdot 5)^6 = 2^6\cdot 5^6$$

$$= \frac{2^6\cdot 5^6\cdot 2^{-4}}{5^7} = 2^6\cdot 2^{-4}\cdot 5^6\,(5^7)^{-1}$$

$$= 2^{6-4}\cdot 5^6\cdot 5^{-7} = 2^2\cdot 5^{-1} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$