Innlevering	Fork1120 - Matematikk forkurs OsloMet
	Obligatorisk innlevering 6
Innleveringsfrist	Torsdag 20. mars 2025
Antall oppgaver:	13

Løsningsforslag

Oppgave 1. Bestem vinkelen mellom vektorene $\vec{u} = [2,7]$ og $\vec{v} = [4,-5]$. Hva er vinkelen mellom to linjer parallelle til vektorene?

LF: Vinkelen θ er gitt ved

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Vi har at absoluttverdiene til vektorene er

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$$

og

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

Skalarproduktet er $\vec{u} \bullet \vec{v} = 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-5) = -27$. Vinkelen mellom vektorene er dermed tilnærmet lik

$$\arccos\left(\frac{-27}{\sqrt{53}\sqrt{41}}\right) = \underline{125.39^\circ}$$

Vinkelen mellom to linjer parallelle til vektorene er tilnærmet lik

$$180^\circ - 125.39^\circ = \underline{54.61^\circ}$$

Oppgave 2. Vi har gitt to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ slik at $|\vec{a}| = 4$ og $|\vec{b}| = 5$ samt at vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 120 grader. Bestem lengden til følgende vektorer og bestem vinkelen mellom dem

$$\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \qquad \text{og} \qquad \vec{v} = -\vec{a} + \vec{b}$$

LF: Vi kan uttrykke både absoluttverdien til vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ og skalarproduktet mellom vektorene ved hjelp av absoluttverdiene til vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og skalarproduktet mellom dem. Vi har at

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(120^\circ) = 4 \cdot 5 \cdot (-1/2) = -10$$

$$|\vec{u}|^2 = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \bullet (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 2^2|\vec{a}|^2 + 3^2|\vec{b}|^2 + 2 \cdot (2 \cdot 3)\vec{a} \bullet \vec{b}$$

$$= 4 \cdot 4^2 + 9 \cdot 5^2 + 12 \cdot (-10) = 64 + 225 - 120 = 169$$

Derfor er $\underline{|\vec{u}| = \sqrt{169} = 13}$. Tilsvarende er

$$|\vec{v}|^2 = (-\vec{a} + \vec{b}) \bullet (-\vec{a} + \vec{b}) = (-1)^2|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot (-1)\vec{a} \bullet \vec{b}$$

$$= 4^2 + 5^2 - 2 \cdot (-10) = 16 + 25 + 20 = 61$$

Så $\underline{|\vec{v}| = \sqrt{61}}$.
Skalarproduktet er gitt ved

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \bullet (-\vec{a} + \vec{b}) =$$

$$2(-1)|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}|^2 + (2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1))\vec{a} \bullet \vec{b} =$$

$$-2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 - (-10) = -32 + 75 + 10 = 53$$

Vi har at vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{53}{13 \cdot \sqrt{61}}\right) = \underline{58.53373°}$$

Oppgave 3. Gitt to ikkje-parallelle vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. De utspenner en trekant ved å la ene hjørne være origo og de to andre hjørnene A og B være gitt ved $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ og $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. La P være punktet midt mellom origo og A og la Q være punktet mellom A og B slik at AQ er halvparten så lang som QB. Vis at linjene mellom B og P treffer linjen gjennom origo og Q i akkurat ett punkt S. Uttrykk vektoren $\overrightarrow{OS}$ ved hjelp av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
(Tegn gjerne en figur for typiske vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.)

LF: Vi har at

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

Siden AQ er halvparten så lang som QB, så er AQ en tredel så lang som AB. Vi har derfor at

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

Derfor er

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$$

Vektoren fra P til B er $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$. Linjen gjennom origo og Q er derfor parametrisert som

$$s\overrightarrow{OQ} = s\left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}\right)$$

og linjen gjennom B og P er parametrisert som

$$\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{PB} = \vec{b} + t\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

De to linjene møtes når

$$s\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}\right)=\vec{b}+t\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

Vi samler ledd med $\vec{a}$ og $\vec{b}$ sammen

$$\left(\frac{s}{3}-t-1\right)\vec{b}+\left(\frac{2s}{3}+\frac{t}{2}\right)\vec{a}=0$$

Siden de to vektorene er linært uavhengige så er dette mulig hvis og bare hvis koffisientene til både $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er null. Dette gir oss

$$\frac{s}{3}-t-1=0 \qquad \text{og} \qquad \frac{2s}{3}+\frac{t}{2}=0$$

Den andre likningen gir at $t=-4s/3$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi

$$\frac{s}{3}-\frac{-4s}{3}-1=0 \qquad \text{som gir} \qquad \frac{5s}{3}=1$$

Derfor er $s=3/5$ og

$$\overrightarrow{OS}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}\right)=\underline{\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{a}}$$

Oppgave 4. Vis at summen av kvadratet av lengdene til hver av de fire sidene i et parallellogram er lik summen av kvadratene av lengdene til de to diagonallinjene i parallellogrammet. (Dette fører til Apollonius sin identitet. Vis gjerne dette.)
LF: Vi kan beskrive parallellogrammet som utspent av to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Summen av kvadratet av lengden til sidene i parallellogrammet er da lik $2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$. Summen av lengdene til de to diagonalene $\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{a}-\vec{b}$ er derimot lik

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=$$

$$(\vec{a}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{b}+2\vec{a}\bullet\vec{b})+(\vec{a}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{b}-2\vec{a}\bullet\vec{b})=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$$

Dette viser resultatet. Alternativt kan dette vises ved å benytte cosinussetningen.

Oppgave 5. Finn volumet til tetraederet med hjørner $\mathcal{O}(0,0,0)$, $P(1,-3,5)$, $Q(2,0,6)$ og $R(4,24,-2)$.

LF:Volumet til tetraederet er lik en sjettedel av absoluttverdien til trippelproduktet av vektorene $\overrightarrow{\mathcal{O}P}$, $\overrightarrow{\mathcal{O}Q}$ og $\overrightarrow{\mathcal{O}R}$.
Trippelproduktet er lik

$$\begin{vmatrix}1&-3&5\\2&0&6\\4&24&-2\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&-3&5\\1&0&3\\2&12&-1\end{vmatrix}=4(-36-(-3(-1-6))+60)=4\cdot 3=12.$$

Denne første likheten kommer av at trippelproduktet er lineært i hver vektor variabel. Vi konkluderer med at volumet til tetraederet er lik $12/6=\underline{2}$.

Oppgave 6. En linje i rommet går gjennom punktene $A(2,-7,5)$ og $B(4,-3,4)$.

a) Finn en parametrisering til linjen.

b) Hva er korteste avstand fra denne linjen til origo? Hvilke punkt på linjen er nærmest origo?

LF: a) Vektoren fra A til B er lik $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = [4, -3, 4] - [2, -7, 5] = [2, 4, -1]$. Dette er en retningsvektroen til linjen. En parametrisering er derfor gitt ved

$$[x, y, z] = \overrightarrow{\mathcal{O}A} + t\overrightarrow{AB} = [2, -7, 5] + t[2, 4, -1]$$

b) La Q være punktet på linjen som er nærmest origo. Komponenten til vektoren fra A til $\mathcal{O}$ langs retningsvektoren $\vec{r}$ er $\overrightarrow{AQ}$. Denne komponenten er lik

$$\overrightarrow{AQ} = -\frac{\overrightarrow{\mathcal{O}A} \bullet \vec{r}}{|\vec{r}|^2}\vec{r} = -\frac{-29}{21}[2, 4, -1] = \frac{29}{21}[2, 4, -1]$$

Punktet Q på linjen nærmest origo er gitt ved at $\overrightarrow{\mathcal{O}Q}$ er summen av $\overrightarrow{\mathcal{O}A}$ og $\overrightarrow{AQ}$.

$$\overrightarrow{\mathcal{O}Q} = [2, -7, 5] + \frac{29}{21}[2, 4, -1] = (1/21)[100, -31, 76]$$

Punktet på linjen nærmest origo har koordinater $\underline{Q(100/21, -31/21, 76/21)}$. Korteste avstand mellom linjen og origo er lengden til vektoren $\overrightarrow{\mathcal{O}Q}$ som er lik $\underline{\ 6.16\ }$.

Oppgave 7. Et plan er gitt ved likningen $x - 2y + 3z = 4$.

a) Gi en parametrisering av planet.

LF: Vi velger punktet $A(4, 0, 0)$ i planet og velger følgende to ikke-parallelle vektorer i planet (vi har sjekker at de står vinkelrett på planet)

$$\vec{a} = [2, 1, 0] \qquad \vec{b} = [3, 0, -1]$$

En parametrisering av planet er da gitt ved

$$[x, y, z] = \overrightarrow{\mathcal{O}A} + s\,\vec{a} + t\,\vec{b} = \underline{[4, 0, 0] + s[2, 1, 0] + t[3, 0, -1]}$$

b) Finn punktet på planet som er nærmest punktet $P(-1, 2, 4)$. Hva er avstanden mellom punktet P og planet?

LF: Vi finner komponenten til vektoren fra A til P som er langs normalvektoren $\vec{n} = [2, -1, 3]$ til planet.

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} - \overrightarrow{\mathcal{O}A} = [-1, 2, 4] - [4, 0, 0] = [-5, 2, 4]$$

La Q være punktet i planet næremst P. Da er $\overrightarrow{QP}$ komponenten til $\overrightarrow{AP}$ langs normalvektoren $\vec{n}$

$$\overrightarrow{QP} = ([-5, 2, 4] \bullet [1, -2, 3])/|[1, -2, 3]|^2[1, -2, 3] = \frac{3}{14}[1, -2, 3]$$

Korteste avstant er derfor lik $|\overrightarrow{QP}| = \underline{3/\sqrt{14}}$. Vi har

$$\overrightarrow{\mathcal{O}Q} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} - \overrightarrow{QP} = [-1, 2, 4] - \frac{3}{14}[1, -2, 3] = [-17/14, 34/14, 47/14]$$

Koordinatene til punktet i planet som er nærmest P er derfor $\underline{Q(-17/14, 17/7, 47/14)}$.

Oppgave 8. Vi har gitt tre punkter A, B og C i rommet med koordinater henholdsvis $(1,0,0)$, $(0,3,2)$ og $(1,3,-3)$.

a) Finn vinkelen $\angle ABC$

LF: Dette er vinklene mellom vektorene $\overrightarrow{BA} = [1,-3,-2]$ og $\overrightarrow{BC} = [1,0,-5]$. Vinklene er derfor lik

$$\angle ABC = \arccos\left(\frac{[1,-3,-2] \bullet [1,0,-5]}{|[1,-3,-2]| \cdot |[1,0,-5]|}\right) = \arccos(11/\sqrt{14 \cdot 26}) = \underline{54.79°}$$

b) Finn en parametrisering av planet som inneholder de tre punktene A, B og C.

LF: En parametrisering er gitt ved

$$[x,y,z] = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BA} + t\overrightarrow{BC} = \underline{[0,3,2] + s[1,-3,-2] + t[1,0,-5]}$$

c) Finn en likning for planet i b) og bestem arealet til trekanten ABC.

En normalvektor er gitt ved kryssproduktet mellom $\overrightarrow{BA} = [1,-3,-2]$ og $\overrightarrow{BC} = [1,0,-5]$.

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 3[5,1,1]$$

Vi velger normalvektoren $\vec{n} = [5,1,1]$. En likning for planet er da gitt ved

$$[x,y,z] \bullet \vec{n} = \overrightarrow{OA} \bullet \vec{n}$$

Vi får

$$\underline{5x + y + z = 5}$$

Arealet til trekant ABC er lik halvparten av lengden til kryssproduktet $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$, som er lik $\underline{(1/2)3 \cdot |[5,1,1]| = 3\sqrt{27}/2 = 9\sqrt{3}/2}$

Oppgave 9. Parametriser linjen som er snittet (felles punkt) av planet i oppgave 7 og planet oppgave 8.

LF: De to plana er gitt ved $x - 2y + 3z = 4$ og ved $5x + y + z = 5$. De snitter i en linje. Det vil si at punktene de har til felles er en linje. Linjen må stå normalt på normalen til begge plana, og er derfor parallell til kryssproduktet mellom normalvektoren. Dette er lik

$$[1,-2,3] \times [5,1,1] = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [-5,14,11].$$

Vi finner et punkt som ligger i begge planenen. Det vil si et punkt (x,y,z) slik at begge likningene er oppfylt. Ved for eksempel å sette $z = 0$ avgrenser vi oss til å finne x og y slik at likningene $x - 2y = 4$ og $5x + y = 5$ (hvis det finnes en løsning

hvor $z = 0$). Ved å løse likningsettet (for eksempel sette inn $y = -5x + 5$ i den første likningen) får vi punktet $(14/11, -15/11, 0)$.
Dette gir følgende parametrisering av linjen som er snittet mellom de plana

$$\begin{aligned} x &= (14/11) - 5t \\ y &= -(15/11) + 14t \\ z &= 11t \end{aligned}$$

for reelle tall t.

Oppgave 10. a) Finn den korteste avstanden mellom linjene parametrisert ved

$$[2, 2, 3]t + [1, 2, 3]$$

for reelle t, og ved

$$[4, 1, -5]s + [1/2, 1/3, -2]$$

for reelle s.
b) Finn endepunktene til det korteste linjestykke mellom linjene (det er det samme som et punkt på hver linje slik at avstanden mellom dem er minst mulig.)

LF: Avstanden er kortes når linjestykket mellom linjene står rett på begge linjene.
La $\overrightarrow{a} = [2, 2, 3]$ og $\overrightarrow{b} = [4, 1, -5]$.
La C være et punkt på den første linjen og D være et punkt på den andre linjen.
Vi har da at CD er kortest når vektoren $\overrightarrow{CD}$ er vinkelrett på både $\overrightarrow{a}$ og $\overrightarrow{b}$. Vi har derfor at

$$\overrightarrow{CD}$$

må være parallell til kryssproduktet

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = [-13, 22, -6]$$

Vi setter nå opp likningen vi får ved å gå fra et punkt fra den første linjen til den andre linjen via en skalar u ganget med $\overrightarrow{n}$.

$$[2, 2, 3]t + [1, 2, 3] + u[-13, 22, -6] = [4, 1, -5]s + [1/2, 1/3, -2]$$

Dette gir likningssystemet

$$\begin{array}{cccll} 2t & -4s & -13u & = & -1/2 \\ 2t & -s & +22u & = & -5/3 \\ 3t & +5s & -6u & = & -5 \end{array}$$

Løsningene er $t \simeq -1.0237$, $s = -0.3860$ og $u = -0.000241896$.
Avstanden mellom linjene er lik

$$|u\overrightarrow{n}| \simeq \underline{0.006349}$$

Vektoren fra origo til punktet på den første linjen er

$$[2, 2, 3](-1.0237) + [1, 2, 3] = \underline{[-1.047, -0.047, -0.0711]}$$

Vektoren fra origo til punktet på den andre linjen er

$$[4, 1, -5](-0.3860) + [1/2, 1/3, -2] = \underline{[-1.044, -0.052, -0.069]}$$

En enklere måte å regne ut avstanden mellom linjene er å finne en felles normalvektor mellom dem og så ta absoluttverdien til komponenten til en vilkårlig vektor mellom punkt, ett på hver linje, langs denne normalvektoren. Hvis vi velger punktet $P(1, 2, 3)$ på den første linjen og punktet $Q(1/2, 1/3, -2)$ på den andre linjen så finner vi at avstanden er absoluttverdien til

$$\overrightarrow{QP} \bullet \overrightarrow{n}/|\overrightarrow{n}| = [-13, 22, -6] \bullet [1 - 1/2, 2 - 1/3, 3 - (-2)]/\sqrt{(-13)^2 + 22^2 + (-6)^2}| =$$

$$\frac{(-39 + 220 - 180)/6}{\sqrt{169 + 484 + 36}} = \frac{1}{6\sqrt{689}} \simeq 0.006349$$

Oppgave 11. Vis følgende resultat for enhver trekant ABC: De tre linjene som går gjennom hvert av hjørnene og står vinkelrett på motstående side, møtes i ett punkt. En visualisering av dette resultatet kan dere finne her Geogebra.
LF: Vi finner snittpunktet til linjen som går gjennom A og B med linjen som går gjennom A og C, og viser at de to punktene er like. La vektor $\mathbf{b}$ være lik $\overrightarrow{AB}$ og la $\mathbf{c}$ være lik $\overrightarrow{AC}$. La $\overrightarrow{r}$ være en vektor som står vinkelrett på linjen gjennom B og C. Vi har da at $\overrightarrow{r}$ er ortogonal til $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$. Dette fører til at

$$\mathbf{b} \bullet \overrightarrow{r} = \mathbf{c} \bullet \overrightarrow{r}$$

Snittpunktet mellom linjene gjennom A og gjennom B er gitt ved å forflytte seg fra punktet A langs vektoren $s\overrightarrow{r}$ slik at $\mathbf{b} - s\overrightarrow{r}$ står vinkelrett på vektor $\mathbf{c}$. Tilsvarende er snittpunktet mellom linjene gjennom A og gjennom C gitt ved å forflytte seg fra punktet A langs vektoren $t\overrightarrow{r}$ slik at $\mathbf{c} - t\overrightarrow{r}$ står vinkelrett på vektor $\mathbf{b}$. Vi tar skalarprodukt med henholdsvis vektor $\mathbf{a}$ og vektor $\mathbf{b}$. Vi får da at løsningene for skalarene s og t er lik

$$s = \frac{\mathbf{c} \bullet \overrightarrow{r}}{\mathbf{b} \bullet \mathbf{c}} \qquad \text{og} \qquad t = \frac{\mathbf{b} \bullet \overrightarrow{r}}{\mathbf{b} \bullet \mathbf{c}}$$

Fra den første observasjonen vår er disse to skalarene like. Vi konkluderer at de tre linjene møtes i ett punkt.

Oppgave 12. Vi skal her komme frem til Snells brytningslov for lys ved å benytte et optimaliseringsprinsipp.
Brytningsindeksen til et medium er et tall n slik at lyshastigheten i mediet er lik c/n, hvor c er lyshastigheten i vakuum. For eksempel er brytningsindeksen i vann $n_v = 1.33$ og i glass er den omtrent $n_g = 1.5$. Her er en video som forklarer hvorfor lyshastigheten er lavere i et medium 3Blue1Brown.
Snells brytningslov sier at hvis en lysstråle går fra et medium med brytningsindeks n_1 inn i et medium med en brytningsindeks n_2, da vil vinklene θ_1 og θ_2 mellom lysstrålene og normalen til flaten i punktet der lysstrålen skifter medium, oppfylle følgende likning

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

a) Anta en lysstråle kommer inn med en vinkel 30 grader med normalen, fra luft ($n = 1$) til vann. Hva er da vinkelen med normalen, den bøyde lysstrålen har i vannet?
b) Vis at Snells brytningslov gir brytningen av lyset slik at tiden det tar for lyset å gå fra et punkt til et annet er kortest mulig.
Bruk gjerne følgende oppsett: Anta vi har et medium med brytningsindeks n_1 for $y \geq 0$ og n_2 for $y < 0$, i et koordinatsystem. Anta at lyset skal gå fra $(0, a)$ til $(c, -b)$ hvor a, b og c er positive. Vis at tiden dette tar er kortest mulig når lysstrålen brytes i x-aksen slik at Snells brytningslov er oppfylt. Hint: Uttrykk tiden det tar for lyset å gå mellom punktene som en funksjon av brytningspunktet x. Finn ut når funksjonen er minst.
LF: a) Vinkelen θ må da oppfylle $1.33 \sin(\theta) = 1 \cdot \sin(30)$. Løsningen er derfor

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1/2}{1.33}\right) = \underline{22.08}$$

b) Tiden det tar å bevege seg fra $(0, a)$ til $(c, -b)$ er summen

$$T(x) = (n_1/c)\sqrt{a^2 + x^2} + (n_2/c)\sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$

Vi deriverer denne funksjonen med hensyn til tiden t og får

$$T'(x) = (n_1/c)\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + (n_2/c)\frac{-(c - x)}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

Den deriverte er lik 0 når

$$n_1\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2\frac{(c - x)}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

Fra definisjonen av sinus så er dette

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

Oppgave 13. En differensiallikning er en likning som involverer en funksjon $x(t)$ og noen av dens deriverte. En løsning er en funksjon som oppfyller likningen.
Vi skal vise at en harmonisk oscillator beveger seg som en sinusfunksjon. En visualisering finner dere her Geogebra. Hookes lov for en ideell springfjær sier at kraften er proporsjonal til forflytningen fra likevektposisjonen og i motsatt retning til forflytningen. La $x(t)$ være forflytningen slik at $x = 0$ i likevektposisjonen (ingen krefter virker fra fjæren). Da er kraften på legemet lik $-kx(t)$, hvor konstanten $k > 0$ er fjærstivheten. Ved Newtons andre lov er kraften lik massen m ganget med akselerasjonen. Akselerasjonen er lik den dobbelderiverte av x med hensyn til tiden t. Kraften er altså lik $mx''(t)$. Siden disse skal være lik hverandre så får vi at objektet beveger seg slik at differensiallik ningen

$$mx''(t) = -kx(t)$$

er oppfylt. Vis at løsningene til differensiallikningen er på formen

$$x(t) = a\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + b\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

for konstanter a og b. Uttrykk Posisjonen $x(t)$ ved tiden t ved hjelp av posisjonen $x_0 = x(0)$ og hastigheten $v_0 = x'(0)$ ved tiden $t = 0$.
LF: $a = \sqrt{m/k}x'(0)$ og $b = x(0)$.