Innlevering	Fork1120 - Matematikk forkurs OsloMet
	Obligatorisk innlevering 6
Innleveringsfrist	Torsdag 20. mars 2025 kl 12:30
Antall oppgaver:	9+4

Alle svar skal begrunnes. Gjør fortrinsvis oppgavene 1-9. De andre er ekstraoppgaver. Hint gis/har blitt gitt onsdag 12. mars.

Oppgave 1. Bestem vinkelen mellom vektorene $\vec{u} = [2,7]$ og $\vec{v} = [4,-5]$. Hva er vinkelen mellom to linjer som er parallelle til de to vektorene?

Oppgave 2. Vi har gitt to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ slik at $|\vec{a}| = 4$ og $|\vec{b}| = 5$ samt at vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 120 grader. Bestem lengden til følgende vektorer og bestem vinkelen mellom dem

$$\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \qquad \text{og} \qquad \vec{v} = -\vec{a} + \vec{b}$$

Oppgave 3. Gitt to ikke-parallelle vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. De utspenner en trekant ved å la det ene hjørnet være origo og de to andre hjørnene A og B være gitt ved $\overrightarrow{\mathcal{O}A} = \vec{a}$ og $\overrightarrow{\mathcal{O}B} = \vec{b}$. La P være punktet midt mellom origo og A og la Q være punktet mellom A og B slik at AQ er halvparten så lang som QB. Vis at linjene mellom B og P treffer linjen gjennom origo og Q i akkurat ett punkt S. Uttrykk vektoren $\overrightarrow{\mathcal{O}S}$ ved hjelp av $\vec{a}$ og $\vec{b}$. (Tegn gjerne en figur for typiske vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.)

Oppgave 4. Vis at summen av kvadratet av lengdene til hver av de fire sidene i et parallellogram er lik summen av kvadratene av lengdene til de to diagonallinjene i parallellogrammet. (Dette fører til Apollonius sin identitet. Vis gjerne dette.)

Oppgave 5. Finn volumet til tetraederet med hjørner $\mathcal{O}(0,0,0)$, $P(1,-3,5)$, $Q(2,0,6)$ og $R(4,24,-2)$.

Oppgave 6. En linje i rommet går gjennom punktene $A(2,-7,5)$ og $B(4,-3,4)$.

a) Finn en parametrisering til linjen.

b) Hva er korteste avstand fra denne linjen til origo? Hvilke punkt på linjen er nærmest origo?

Oppgave 7. Et plan er gitt ved likningen $x - 2y + 3z = 4$.

a) Gi en parametrisering av planet.

b) Finn punktet på planet som er nærmest punktet $P(-1,2,4)$. Hva er avstanden mellom punktet P og planet?

Oppgave 8. Vi har gitt tre punkter A, B og C i rommet med koordinater henholdsvis $(1,0,0)$, $(0,3,2)$ og $(1,3,-3)$.

a) Finn vinkelen $\angle ABC$

b) Finn en parametrisering av planet som inneholder de tre punktene A, B og C.

c) Finn en likning for planet i b) og bestem arealet til trekanten ABC.

Oppgave 9. Parametriser linjen som er snittet (felles punkt) av planet i oppgave 7 og planet oppgave 8.

Oppgave 10. a) Finn den korteste avstanden mellom linjene parametrisert ved

$$[2, 2, 3]t + [1, 2, 3]$$

for reelle t, og ved

$$[4, 1, -5]s + [1/2, 1/3, -2]$$

for reelle s.

b) Finn endepunktene til det korteste linjestykket mellom linjene (det er det samme som et punkt på hver linje slik at avstanden mellom dem er minst mulig.)

Oppgave 11. Vis følgende resultat for enhver trekant ABC: De tre linjene som går gjennom hvert av hjørnene og står vinkelrett på motstående side, møtes i ett punkt. En visualisering av dette resultatet kan dere finne her Geogebra.

Oppgave 12. Vi skal her komme frem til Snells brytningslov for lys ved å benytte et optimaliseringsprinsipp.

Brytningsindeksen til et medium er et tall n slik at lyshastigheten i mediet er lik c/n, hvor c er lyshastigheten i vakuum. For eksempel er brytningsindeksen i vann $n_v = 1.33$ og i glass er den omtrent $n_g = 1.5$. Her er en video som forklarer hvorfor lyshastigheten er lavere i et medium 3Blue1Brown.

Snells brytningslov sier at hvis en lysstråle går fra et medium med brytningsindeks n_1 inn i et medium med en brytningsindeks n_2, da vil vinklene θ_1 og θ_2 mellom lysstrålene og normalen til flaten i punktet der lysstrålen skifter medium, oppfylle følgende likning

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

a) Anta en lystråle kommer inn med en vinkel 30 grader med normalen, fra luft ($n = 1$) til vann. Hva er da vinkelen med normalen, den bøyde lysstrålen har i vannet?

b) Vis at Snells brytningslov gir brytningen av lyset slik at tiden det tar for lyset å gå fra et punkt til et annet er kortest mulig.

Bruk gjerne følgende oppsett: Anta vi har et medium med brytningsindeks n_1 for $y \geq 0$ og n_2 for $y < 0$, i et koordinatsystem. Anta at lyset skal gå fra $(0, a)$ til $(c, -b)$ hvor a, b og c er positive. Vis at tiden dette tar er kortest mulig når lysstrålen brytes i x-aksen slik at Snells brytningslov er oppfylt. Hint: Uttrykk tiden det tar for lyset å gå mellom punktene som en funksjon av brytningspunktet x. Finn ut når funksjonen er minst.

Oppgave 13. En differensiallikning er en likning som involverer en funksjon $x(t)$ og noen av dens deriverte. En løsning er en funksjon som oppfyller likningen.

Vi skal vise at en harmonisk oscillator beveger seg som en sinusfunksjon. En visualisering finner dere her Geogebra. Hookes lov for en ideell springfjær sier at kraften er proporsjonal til forflytningen fra likevektposisjonen og i motsatt retning til forflytningen. La $x(t)$ være forflytningen slik at $x = 0$ i likevektposisjonen (ingen krefter virker fra fjæren). Da er kraften på legemet lik $-kx(t)$, hvor konstanten $k > 0$ er fjærstivheten. Ved Newtons andre lov er kraften lik massen m ganget med akselerasjonen. Akselerasjonen er lik den dobbelderiverte av x med hensyn til tiden t. Kraften er altså lik $mx''(t)$. Siden disse skal være lik hverandre så får vi at objektet beveger seg slik at differensiallik ningen

$$mx''(t) = -kx(t)$$

er oppfylt. Vis at løsningene til differensiallikningen er på formen

$$x(t) = a \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + b \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

for konstanter a og b. Uttrykk Posisjonen $x(t)$ ved tiden t ved hjelp av posisjonen $x_0 = x(0)$ og hastigheten $v_0 = x'(0)$ ved tiden $t = 0$.