Innlevering i	FORK1120 - Matematikk forkurs OsloMet
	Obligatorisk innlevering 5
Innleveringsfrist	Torsdag 6. februar 2025
Antall oppgaver:	11

Dere kan arbeide sammen, men lever individuelt. Ikke kopier. Dere kan spøre om hjelp i øvingstimene.

Oppgave 1. Finn volum og overflateareal til følgende figurer. Tegn gjerne figurene.

a) En rett sylinder med radius 5 og høyde 10. (Bunnplaten tas med når dere finner overflatearealet, men ikke topplaten).

LF: Volumet er grunnflaten ganget med høyden

$$\pi r^2 h = \pi 5^2 \cdot 10 = \underline{250\pi} \simeq 785.398$$

Overflatearealet er lik

$$\pi r^2 + 2\pi r h = \pi 5^2 + 2\pi 5 \cdot 10 = \pi(25 + 100) = \underline{125\pi} \simeq 392.699$$

b) En kjegle med radius 5 og høyde 12. (Bunnplaten tas med.)

LF: Volumet er lik

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi 5^2 \cdot 12/3 = \underline{100\pi} \simeq 314.159$$

Overflatearealet er lik

$$\pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = \pi 5^2 + \pi 5 \cdot \sqrt{5^2 + 12^2} = 5\pi(5 + \sqrt{169}) = \underline{90\pi} \simeq 282.743$$

c) En halvkule (hvor snittflaten tas med) som har diameter 8.

LF: Radien til halvkulen er lik halve diameteren $r = 4$. Volumet er lik

$$V = \frac{1}{2}\frac{4\pi r^3}{3} \simeq \frac{1}{2}\frac{4\pi 4^3}{3} = \underline{128\pi/3} \simeq 134.041$$

Overflatearealet er lik

$$A = \pi r^2 + \frac{1}{2} 4\pi r^2 = 3\pi r^2 = 3\pi 4^2 = \underline{48\pi} \simeq 150.796$$

d) Et triangulært rett prisme som beskrives som en likesidet trekant med sidelengder 4 og med en dybde i prismet som er lik 7.

LF: Volumet er lik produktet av dybden og arealet til trekanten. Arealet til den likeside trekanten er lik $(1/2)4^2 \cdot \sin(60^\circ) = 4\sqrt{3}$. Volumet er derfor lik

$$V = 4\sqrt{3} \cdot 7 = \underline{28\sqrt{3}} \simeq 48.4974$$

Overflatearealet er lik

$$A = (4 + 4 + 4) \cdot 7 + 2 \cdot 4\sqrt{3} = \underline{4(21 + 2\sqrt{3})} \simeq 97.856$$

e) En kube hvor diameteren fra et hjørne til motsatte hjørne (lengst mulig unna) er lik $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

LF: La sidelengen i kuben være lik L. Vi benytter Pytagoras sin sats to ganger. Først ser vi at diagonalen i en av de seks sidene i kuen er lik $\sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2}L$. Deretter benytter vi Pytagoras sin sats på den rettvinkla trekanten med hypotenus en lang diagonal i kuben og kateter med lenge L og $\sqrt{2}L$. Vi finner at at lengden til en av de lange diagonalene er lik $\sqrt{L^2 + 2L^2} = \sqrt{3}L$.

Vi kan nå finne lengden L: fordi $2\sqrt{3} = \sqrt{3}L$, så er $L = 2$. Volumet til kuben er derfor lik $V = 2^3 = \underline{8}$. Overflatearealet til kuben er lik $A = 6 \cdot 2^2 = \underline{24}$.

Oppgave 2. Finn vinklene og lengden til sidene, samt arealet til trekanten $\triangle ABC$ gitt som følger. Svaret kan gis som desimaltall med minst 4 siffers nøyaktighet. Tallene som er oppgitt er eksakte.

a) $\angle A = 90°$, $\angle C = 30°$ og $AB = 8$.

LF: Dette er en rettvinkla trekant. Siden summen av vinklene i en trekant er 180° så er $\underline{\angle B = 60°}$. Hypotenusen BC har lengde

$$\underline{BC = 8/\sin(30°) = 8/(1/2) = 16.00}.$$

Kateten AC har lengde $\underline{AC = 8/\tan(30°) = 8/(1/\sqrt{3}) = 8\sqrt{3} \approx 13.856}$. Arealet til trekanten er $AC \cdot AB/2$ (siden $\sin(\angle A) = 1$). Arealet er $(8\sqrt{3}) \cdot 8/2 = 32\sqrt{3} \approx \underline{55.425}$.

b) $\angle A = 90°$, $\angle C = 33°$ og $AB = 8$. Denne oppgaven er svært lik deloppgave a). Vinkel C er øka fra 30 til 33 grader. Vi forventer derfor at AC og BC er litt kortere her. Vinkel B er lik $\underline{\angle B = 57°}$. Hypotenusen BC har lengde $\underline{BC = 8/\sin(33°) \approx 14.689}$. Kateten AC har lengde $\underline{AC = 8/\tan(33°) \approx 12.319}$. Arealet til trekanten er $AC \cdot AB/2 = 12.319 \cdot 8/2 \approx \underline{49.276}$.

c) $\angle C = 20°$ og $AC = BC = 10$.

LF: Dette er ein likebeina trekant med to sider av lengde 10 og vinkel 20° mellom de to like sidene. Vinkel A og B må da være like store. Siden summen av vinklene i en trekant er 180° er $\underline{\angle A = \angle B = 80°}$. Lengden på siden $\underline{AB}$ er lik $2AC\cos(80°) = 20\cos(80°) \approx \underline{3.473}$. Arealet til trekanten er lik $AB \cdot AC \cdot \sin(80°)/2 \approx \underline{17.10}$.

d) $\angle A = 55°$, $\angle B = 44°$ og $AC = 23$.

LF: Siden summen av vinklene i en trekant er 180° så er $\underline{\angle C = (180 - 44 - 55)° = 81°}$. Her er det naturlig å anvende sinussettningen siden vi kjenner både vinkel B og lengden til side $b = AC$. Sinussettningen sier at følgende forhold er like

$$\frac{\sin \angle B}{b} = \frac{\sin \angle A}{a} = \frac{\sin \angle C}{c}.$$

Forholdet er lik $\sin(44°)/23 = 0.0302025\ldots$.

Lengden til siden $\underline{AB \text{ er } \sin(81°)/0.0302025 \approx 32.70}$ og

lengden til siden $\underline{BC \text{ er } \sin(55°)/0.0302025 \approx 27.12}$.

Arealet til trekanten er lik $AB \cdot AC \cdot \sin(55°)/2 \approx \underline{308.1}$.

e) $\angle A = 40°$, $AC = 8$ og $BC = 7$.

LF: Det er to forskjellige trekanter med disse egenskapene. Vi bruker sinussettningen og får :

$$\frac{\sin \angle C}{c} = \frac{\sin \angle B}{b} = \frac{\sin \angle A}{a} = \frac{\sin(40°)}{7} \approx 0.0918268\ldots.$$

Det følger at $\sin \angle B = AC \cdot 0.0918268\ldots = 0.734614\ldots$. Dette gir to mulige løsninger for $\angle B$, $\angle B_1 = \arcsin(0.734614) = 47.27°$ og $\angle B_2 = 180° - \angle B_1 = 132.7°$. Tilsvarende verdier for vinkel C er $\angle C_1 = 92.73°$ og $\angle C_2 = 7.275°$. Lengden til siden AB, eller c, er lik $\sin(\angle C)\sin(\angle A)/a$. I de to tillfellene får vi $\underline{AB_1 = 10.88 \text{ og } AB_2 = 1.37}$.

Arealet til trekanten er lik $AC \cdot AB \cdot \sin(\angle C)/2$. I tilfelle 1 er arealet til trekanten $8 \cdot 7 \sin(92.725°) \approx \underline{27.97}$ og i tilfelle 2 er arealet til trekanten $8 \cdot 7 \sin(7.2746°)/2 \approx \underline{3.545}$.

f) $\angle A = 120°$, $AB = 12$ og $AC = 7$.

Her er det naturlig å bruke cosinussettningen siden vi kjenner vinkelen mellom de to kjente sidene. Cosinussettningen gir at

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(120°) = 7^2 + 12^2 - 2 \cdot 7 \cdot 12(-1/2) = 49 + 144 + 84 = 277.$$

Siden $a > 0$ så er $\underline{BC = a = \sqrt{277} \approx 16.64}$. Fra sinussettningen er

$$\sin(\angle C) = AB \cdot \sin(\angle A)/BC = 12(\sqrt{3}/2)/16.6433 = 0.62441\ldots.$$

Siden $\angle A = 120°$ så er summen av vinkel B og vinkel C lik 70°. Derfor er $\underline{\angle C = 38.64°}$ og $\underline{\angle B = 21.36°}$. Arealet til trekanten er lik

$$7 \cdot 12 \cdot \sin(120°)/2 = \underline{36.37}.$$

Oppgave 3. Vi har oppgitt følgende om en firkant $ABCD$: Lengden på side AB er lik 4, lengden på side AD er lik 5, vinkel BAD og ABC er begge lik 100°, og vinkel BCD er lik 80°. Finn lengden på sidene BC og CD.

LF: Vi kjenner tre av de fire vinklene i firkanten. Vinkel ADC er derfor lik $(360 - 100 - 100 - 80)° = 80°$. Firkanten er et trapes. Dette trapeset er symmetrisk ved refleksjon om aksen som er vinkelrett på linjen AB og som krysser midt på linjen AB. Derfor er lengden til AB er lik lengden til CD, så $\underline{|BC| = 5}$. Lengden til CD er lik lengden til AB pluss to kopier av lengden $|AD|\cos(80°)$. Vi får

$$|CD| = |AB| + 2 \cdot |AD|\cos(80°) = 4 + 2 \cdot 5 \cdot \cos(80°) \simeq \underline{5.73648}$$

Denne oppgaven fikk kanskje en overraskende enkel løsning. Hvis vi erstatter vinkel BCD med v istedenfor 80 grader kan vi løse problemet som følger (som skissert i en forelesning):

Kosinussetningen gir at BD er lik

$$|AD| = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5\cos(100°)} \simeq 6.9243$$

Ved sinussetningen er vinkel ABD gitt ved

$$\arcsin\left(\frac{|AD|\sin(100°)}{|BD|}\right) \simeq \arcsin(0.71112) \simeq 45.3264°)$$

(Vinkelen må være mindre enn 90 grader siden vinkel A er 100 grader.) Vi får da at vinkel DBC er lik

$$\angle DBC = (100 - 45.3264)° = 54.6735°$$

Vi kan nå benytte sinussetningen på trekanten BCD,

$$|CD| = \frac{|AD|\sin(\angle DBC)}{\sin(v)}$$

$$|BC| = \frac{|AD|\sin(180^\circ - v - \angle DBC)}{\sin(v)}$$

Vi sjekker at vi får den forventa løsningen når $v = 80^\circ$

$$|CD| = \frac{6.9243\sin(54.6735)}{\sin(80^\circ)} = 5.73648$$

$$|BC| = \frac{6.9243\sin(180^\circ - 80^\circ - 54.6735)}{\sin(80^\circ)} = 5$$

Oppgave 4. (Hvis du syntes oppgave 2 var vanskelig, kan du hoppe over denne oppgaven.) Bestem lengden på alle sidene og finn alle vinklene til alle trekantene spesifisert som følger:

a) Trekantene er rettvinkla og to av sidene har lengde 4 og 5.

Tilfellet 1: Katetene har lengde 4 og 5. Da har hypotenus lengde $\sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} \approx 6.403$. Vinkelen som har kateten med lengde 5 som hosliggende katet er da lik $\arctan(4/5) \approx 38.660^\circ$. Den andre vinkelen, som har kateten med lengde 4 som hosliggende, er da lik $90^\circ - 38.660^\circ = 51.340^\circ$.

Tilfellet 2: Hypotenus er lengre enn katetene. En mulighet er at 5 er lengden på hypotenus og 4 er lengden på den ene kateten. Lengden på den andre kateten er da $\sqrt{5^2-4^2} = \sqrt{9} = 3$ (eksakt). Vinkelen som har kateten med lengde 4 som hosliggende er da lik $\arccos(4/5) \approx 36.870^\circ$. Den andre vinkelen, som har kateten med lengde 3 som hosliggende, er da lik $90^\circ - 36.870^\circ = 53.130^\circ$.

b) Trekantene er likebeina og en av vinklene er 30 grader og en av sidene har lengde 10.

Tilfellet 1: Vinkelen mellom de to sidene som er like lange er 30 grader. Da er de to andre vinklene $(180^\circ - 30^\circ)/2 = 75^\circ$. Hvis de to sidene som er like lange har lengde 10 har den tredje siden lengden $2 \cdot 10\sin(15^\circ) \approx 5.176$.

Tilfellet 2: Vinklenen som i tilfellet 1, men anta at det er siden som ikke er like lang som en annen side som har lengde 10. Da er lengden på de to sidene som er like lange lik $(10/2)/\sin(15^\circ) \approx 19.316$.

Tilfellet 3: La oss nå anta at vinkelen på 30 grader ikke er vinkelen mellom sidene som er like lange. Da er begge disse vinklene 30 grader, og vinkelen mellom de like lange sidene er 120°. Hvis de to like lange sidene har lengde 10, da er lengden på den tredje siden $2 \cdot 10 \cdot \sin(60^\circ) = 10\sqrt{3} \approx 17.320$.

Tilfellet 4: La vinklene være som i tilfellet 3. En annen mulighet er at de to like sidene har lengde $10/\sqrt{3} \approx 5.774$ og at den tredje siden har lengde 10.

c) Den ene vinkelen er 30 grader og to av sidene har lengde 8 og 5.

La side a ha lengde 8 og side b ha lengde 5. Vi undersøker hvilke trekanter vi kan ha når vi setter hver av de tre vinklene i trekanten lik vinkelen 30°.

Tilfellet 1: Vinkel C er 30 grader. Ved cosinussetningen er da $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(30^\circ) = 89-40\sqrt{3} = 19.717$. Derfor er lengden på den tredje siden $c = 4.440$. Ved sinussetningen er $\sin(\angle A) = 8\sin(30^\circ)/c = 0.9008$. Derfor er $\angle A$ er lik 64.26° eller $(180-64.26)^\circ = 115.74^\circ$. Sinussetningen gir også at $\sin(\angle B) = 5\sin(30^\circ)/c = 0.5630$. Dette gir at $\angle B$

er lik $34.26°$ eller $145.74°$. Vi ser at de eneste kombinasjoner av vinklene som har sum $180°$ er $\angle A = 115.74°$, $\angle B = 34.26°$, $\angle C = 30°$.

Tilfellet 2: Vinkel B er 30 grader. Ved sinussetningen så er $\sin(\angle A) = a\sin(\angle B)/b = 4/5$. Derfor er $\angle A$ lik $53.13°$ eller $126.87°$. Når $\angle A = 53.13°$ er da $\angle C = 96.87°$. Ved sinussetningen er da lengden på den siste siden er da lik $c = \sin(\angle C)b/\sin(\angle B) = 9.93(9.928)$.

Tilfellet 3: Vinkel B er 30 grader, men vi ser på den andre muligheten for vinkel A fra Tilfellet 2. Da er $\angle A = 126.87°$. Og derfor er $\angle C = 23.13°$ Ved sinussetningen er da $c = \sin(\angle C)b/\sin(\angle B) = 3.928$.

Tilfellet 4: Vinkel A er lik 30 grader. Ved sinussetningen er $\sin(\angle B) = b\sin(\angle A)/a = 5/16 = 0.3125$. Dette gir at $\angle B$ er lik 18.21 eller 161.79 grader. Vinkelen $\angle B = 161.79°$ er ikke mulig siden summen av vinklene $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{circ}$. Hvis $\angle B = 18.21°$, da er $\angle C = 131.79°$. Lengden på den siste siden er $c = a\sin(\angle C)/\sin(\angle A) = 11.93$.

d) Trekanten har sider av lengde 2, 3 og 4. Vi gir navn til hjørnene i trekanten slik at side a har lengde 2, side b har lengde 3 og side c har lengde 4. Fra cosinussetningen har vi at $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle C)$. Dette gir at $\cos(\angle C) = -1/4$. Derfor er $\angle C = \arccos(-1/4) = 104.48°$. Ved sinussetningen så er $\sin(\angle B) = b\sin(\angle C)/c = 0.72618$. Siden summen av vinklene skal være $180°$ så er bare $\angle B = 46.57$ en mulig løsning. Vinkel A må da være $\angle A = 28.96°$.

Oppgave 5. Hva er forholdet mellom høyden og radien til kjeglen som får plass inni en kule med radius lik 1 og har størst mulig volum?

LF: En kjegle som har støst mulig volum må berøre kulen både i toppen og langs hele sirkelen i bunnen av kjeglen. Vi kan plassere kjeglene slik at den er i posisjon $(0, 0, 1)$ på enhetskulen i rommet med senter i origo. Lar vi sirkelen i bunn bevege seg nedover kulen ser vi at volumet øker helt til vi kommer ned til xy-planet, fordi både høyden og radien i kjeglen øker da. Nå vi går under xy-planet vil radien avta og høyden fremdeles øke. Ved bunnen av kulen er radien i kjeglen blitt lik 0, så volumet er lik 0. Vi ønsker å finne z-koordinaten hvor vi får størst volum. Vi uttrykker volumet til den innskrevne kjeglen som en funksjon i distansen d under xy-planet hvor kjeglebunnen møter kulen. Da er høyden til kjeglen lik $1 + d$ og kvadratet til radien til kjeglen, ved Pytagoras' sats, er lik $1 - d^2$. Volumet er derfor gitt ved uttrykket

$$V(d) = \frac{\pi(1+d)(1-d^2)}{3} = \frac{\pi(1+d-d^2-d^3)}{3}$$

Den deriverte til volum-funksjonen satt lik 0 gir likningen

$$1 - 2d - 3d^2 = 0$$

Røttene er lik

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-6} = \frac{1 \pm 2}{3}$$

Det er 1 og $-1/3$. I endepunktene $d = \pm 1$, er volumet lik 0. Den største veriden får vi derfor når $d = -1/3$. I dette tilfellet er høyden til kjeglen lik $1 - 1/3 = 4/3$ og radien til kjeglen er lik $\sqrt{1 - (1/3)^2} = 2\sqrt{2}/3$. Forholdet mellom høyden og radien til den største kjeglen er derfor lik $(4/3)/(2\sqrt{2}/3) = \underline{\sqrt{2}}$.

Oppgave 6. Trappeformelen sier at summen av 2 ganger opptrinnet pluss inntrinnet skal være 62 cm (eller ikke avvike med mer en 2 cm fra dette.)

$$2O + I = 62\ cm$$

Hva må opptrinn og inntrinn være for en trapp som skal ha en stigning på 30 grader?

Finn gjerne, mer generelt, en formel for opptrinnet og inntrinnet når trappen har en stigning på v grader.

LF: HVis stigningen er lik v, så er forholdet $O/I = \tan(v)$. Vi har derfor at $O = I\tan(v)$. Trappeformelen gir derfor likningen

$$2O + I = (2\tan(v) + 1)I = 62\ cm$$

Dette gir oss formlene

$$I = \frac{62\text{ cm}}{1 + 2\tan(v)} \qquad \text{og} \qquad O = \frac{62\tan(v)\text{ cm}}{1 + 2\tan(v)}$$

Når $v = 30°$, så er $\tan(v) = 1/\sqrt{3}$. I dette tilfellet blir derfor inntrinnet og opptrinnet lik

$$I = \frac{62\text{ cm}}{1 + 2/\sqrt{3}} = \frac{62\sqrt{3}\text{ cm}}{\sqrt{3}+2} \simeq 28.77\text{ cm} \qquad \text{og} \qquad O = \frac{62\text{ cm}}{\sqrt{3}+2} \simeq 16.61\text{ cm}$$

Oppgave 7. Finn alle vinkler v, med enhet radianer, i intervallet $[0, 2\pi]$ slik at hver av likningene er oppfylt. Svarene skal gis eksakt.

a) $\sin(v) = -\frac{1}{2}$

LF: Løsningene er $\underline{v = \frac{7\pi}{6} \text{ eller } v = \frac{11\pi}{6}}$.

b) $\cos(v) = 1$

LF: Løsningene er $\underline{v = 0 \text{ eller } v = 2\pi}$.

c) $\cos(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

LF: Løsningene er $\underline{v = \frac{5\pi}{6} \text{ eller } v = \frac{7\pi}{6}}$.

d) $\sin(v) - \sqrt{3}\cos(v) = 0$

LF: Det er ingen løsning når $\cos v = 0$ (siden da er $\sin v = \pm 1$). Likningen er derfor ekvivalent til likningen $\tan(v) = \sqrt{3}$. Løsningene er $\underline{v = \frac{\pi}{3} \text{ og } v = \frac{4\pi}{3}}$.

e) $\sin(v)\cos(v) = 0$

LF: Likningen er ekvivalent til $\sin(v) = 0$ eller $\cos(v) = 0$. Løsningsmengden er

$$\underline{\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}}.$$

Oppgave 8. Finn alle vinkler v, med enhet grader, i intervallet $[0, 360°]$ slik at hver av likningene er oppfylt. Svarene skal gis med fem gyldige siffer.

a) $\sin(v) = \frac{1}{3}$

LF: Løsningene er $\underline{v = 19.471° \text{ eller } v = 160.53°}$.

b) $\cos(v) = 0.8$

LF: Løsningene er $\underline{v = 36.870° \text{ eller } v = 323.13°}$.

c) $\tan(v) = 1000$

LF: Løsningene er $\underline{v = 89.943 \text{ eller } v = 269.94°}$.

Oppgave 9. Finn alle vinkler v, med enhet grader, i intervallet $[0, 360°]$ slik at hver av likningene er oppfylt. Svarene skal gis eksakt.

a) $\sin^2(v) = \frac{1}{2}$

LF: Likningen er ekvivalent til $\sin(v) = 1/\sqrt{2}$ eller $\sin(v) = -1/\sqrt{2}$. I intervallen er løsningene gitt ved $\underline{v = 45, 135, 225 \text{ og } 315 \text{ grader}}$.

b) $2\sin(v) + 5 = 9 - \sin(v)$

LF: Dette er en lineær likning i $\sin(v)$. Vi løser likningen of får $\sin(v) = 4/3$. Denne likningen har <u>ingen løsning</u> siden $\sin(v) \leq 1$ for alle v.

c) $\cos^2(v) - \cos(v) = 0$ Vi faktoriserer uttrykket og får $\cos(v)(\cos(v) - 1) = 0$. Et produkt er lik null hvis og bare hvis minst en av faktorene er null. Derfor er løsningen alle v slik at $\cos(v) = 0$ eller $\cos(v) = 1$. Løsningen er derfor $\underline{v = 0, 90, 270 \text{ og } 360 \text{ grader}}$.

d) $\sin^2(v) + \cos(v) - 1 = 0$

LF: Siden $\sin^2(v) = 1 - \cos^2(v)$ for alle v så er liknigen ekvivalent til $-\cos^2(v) + \cos(v) = 0$. Dette er igjen ekvivalent til likningen i deloppgave c), og derfor er <u>løsningsmengden som i c)</u>.

e) $2\sin(v) - \tan(v) = 0$

LF: Her må vinkelen v være slik $\cos(v) \neq 0$ siden $\tan(v)$ er bare definert da. Vi faktoriserer uttrykket og får $\sin(v)(2 - 1/\cos(v)) = 0$. Produktet er null hvis og bare hvis $\sin(v) = 0$ eller $\cos(v) = 1/2$. Løsningen er derfor

$\underline{v = 0, 60, 180, 300 \text{ og } 360 \text{ grader}}$.

Oppgave 10. Løs følgende likninger. Gi svarene med 4 gyldige siffer.

a) $\arcsin x = 0.3786$. Likningen sier bare at 0.3786 er vinkelen mellom $-\pi$ og π slik at sinus til denne vinkelen er lik x. Løsningen er $x = \sin(0.3786) = \underline{0.3696}$.

b) $\tan(2\pi x) = 1$ hvor $x \in [-2, 2]$.

La vinkelen være $v = 2\pi x$. Variabelen x er lik $v/(2\pi)$. Da er v mellom -4π og 4π. Løsningene til $\tan(v) = 1$ er $v = \pi/4 + n\pi$ for heltall n. I det gitte intervallet kan n være mellom -4 og 3. Løsningsmengden er derfor

$$\{\underline{1/8 - 2,\ 1/8 - 3/2,\ 1/8 - 1,\ 1/8 - 1/2,\ 1/8,\ 1/8 + 1/2,\ 1/8 + 1,\ 1/8 + 3/2}\}.$$

Som desimaltall er dette nøyaktig lik

$$\{-1.875,\ -1.375,\ -0.875, -0.375,\ 0.125,\ 0.625,\ 1.125, 1.625\}$$

c) $\cos(2x - 1) = 0.3479$ hvor $x \in [0, 3]$.

Vinkelen er $v = 2x - 1$. Da er variabelen $x = (v + 1)/2$. I hvert omløp er løsningne gitt ved $\arccos(0.3479) = 1.21547$ og $2\pi - \arccos(0.3479) = 5.06771$. Dette gir bare en løsning for x: $\underline{x = 1.1077}$.

Oppgave 11. Finn alle løsningene, i første omløp $[0, 2\pi\rangle$, til ulikhetene. Svaret skal gis eksakt.

a) $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) > 0$.

Likningen $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 0$ er ekvivalent til $\tan(x) = -1/\sqrt{3}$, forutsatt at $\cos(x) \neq 0$. Løsningene er $x = 5\pi/6$ og $x = 11\pi/6$. Funksjonen $f(x) = \sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)$ er kontinuerlig. Den endrer derfor bare fortegn når den passerer et nullpunkt. Vi kan nå sjekke fortegnet i hver intervall $[0, 5\pi/6\rangle$, $\langle 5\pi/6, 11\pi/6\rangle$ og $\langle 11\pi/6, 2\pi\rangle$. (For eksempel er $f(0) = f(2\pi) = 1 > 0, f(\pi) = -1 < 0$.) Vi finner at likningen $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) > 0$ har løsningen

$$\underline{[0, 5\pi/6\rangle \cup \langle 11\pi/6, 2\pi\rangle}.$$

b) $\cos^2(x) + 2\cos(x) + 3/4 \geq 0$.

Uttrykket er et kvadratisk polynom med variabel u lik $\cos(x)$. Det kvadratiske uttrykket

$$u^2 + 2u + 3/4 = (u + 3/2)(u + 1/2) = 0$$

er større enn eller lik 0 når $u \geq -1/2$ eller $u \leq -3/2$. Ulikheten er derfor ekvivalent til den enklere ulikheten $\cos(x) \geq -1/2$ (den andre ulikheten $\cos(x) \leq -3/2$ har ingen løsning). Løsningen er

$$\underline{[0, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 2\pi\rangle}.$$

c) $\cos^2(x) - \sin(x) < -1$.

Ved å bruke Pytagoras setning er denne ulikheten ekvivalent til $-\sin^2(x) - \sin(v) < -2$ som også ekvivalent til $\sin^2(x) + \sin(v) - 2 > 0$. Siden $\sin(x)$ og $\sin^2(x)$ aldrig er større enn 1 er det <u>ingen løsninger</u> til ulikheten.

d) $\cos(x - 1) < 2\cos^2(x - 1)$.

La vinkelen være $v = x - 1$. Ulikheten er ekvivalent til $2\cos^2(v) - \cos(v) > 0$. Vi faktoriserer uttrykket som et polynom i $u = \cos(v)$ og får $2u^2 - u = u(2u - 1)$. Dette uttrykket er positivt (fortegnskjema) når $\cos(v)$ og $\cos(v) - 1/2$ har samme fortegn. Dette gir følgende løsningsmengde for $v = x - 1$

$$[0, \pi/3\rangle \cup \langle \pi/2, 3\pi/2\rangle \cup \langle 5\pi/3, 2\pi\rangle$$

for v i første omløp. Løsningsmengden for x er derfor

$$\underline{[0, \pi/3 + 1\rangle \cup \langle \pi/2 + 1, 3\pi/2 + 1\rangle \cup \langle 5\pi/3 + 1, 2\pi\rangle}$$

e) $\sin(x) < \sin(2x)$.

Vi kan benytte addisjonsformelen for sinus $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Ulikheten blir da ekvivalent til $2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) = \sin(x)(2\cos(x) - 1) > 0$. Løsningen består av alle x slik at $\sin(x)$ og $2\cos(x) - 1$ har samme fortegn. Løsningsmengden er

$$\underline{\langle 0, \pi/3\rangle \cup \langle \pi, 5\pi/3\rangle}.$$

f) $2\cos(2x) + 8\cos(x) + 5 \geq 0$

Addisjonsformlene for cosinus samt Pytagors sin sats gir at $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Derfor er uttrykket i ulikheten ekvivalent til $4\cos^2(x) + 8\cos(x) + 3$. Dette kvadratiske uttrykket i $\cos(x)$ faktoriserer som $(2\cos(x) + 1)(2\cos(x) + 3)$. Den andre faktoren er altid større eller lik 1 så uttrykket er ikke-negativt når $\cos(x) + 1/2$ er ikke-negativt. Løsningsmengden er derfor

$$\underline{[0, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 2\pi\rangle}.$$