1 april 25

15A Bestemte integral

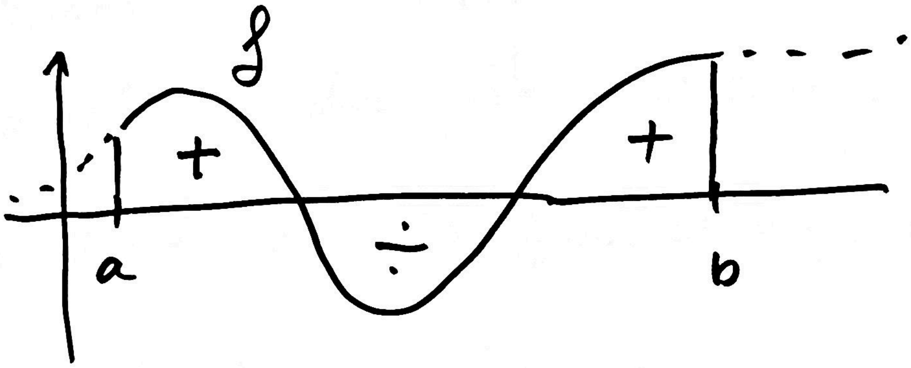
$\int_a^b f(x)\,dx$ "integralet fra a til b av f(x) med hensyn til x."

$f(x)$ ← integrand

dx ← differensial

a nedre integralgrense

b øvre ——



$\int_a^b f(x)\,dx$ er arealet med fortegn mellom grafen til f(x) og x-aksen avgrenset av de vertikale linjene $x=a$ og $x=b$.

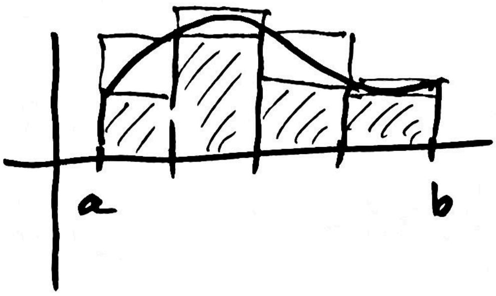
Nedre sum N_n (med n oppdelinger av [a, b])

Deler av [a, b] i n like biter.

(bredden er da $\frac{b-a}{n}$)

Tar summen av bredden · minste funksjonsverdi for hver av intervallene.

Tilsvarende øvre sum U_n



U_n

N_n

$\int_a^b f(x)\,dx$ eksisterer hvis

$$\lim_{n\to\infty} N_n = \lim_{n\to\infty} U_n$$

integralet er da lik grensen.

Vi sier da at $f(x)$ er <u>integrerbar</u>

Resultat: Hvis $f(x)$ er kontinuerlig på $[a, b]$, da er den integrerbar.

Ikke alle funksjoner er integrerbare.

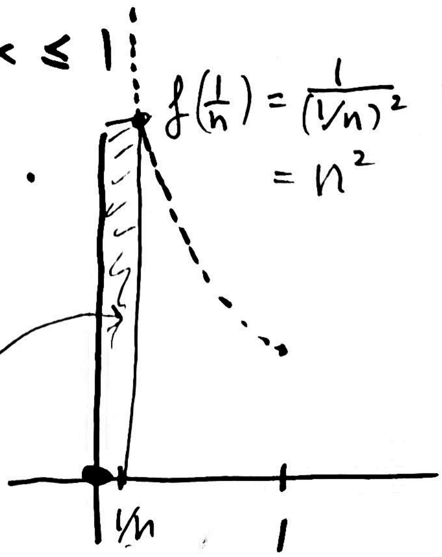
$$* \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1/x^2 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$D_f = [0, 1]$.

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(1/n)^2} = \frac{1}{1/n^2} = n^2$

Diskontinuerlig i $x = 0$ og ubegrensa.

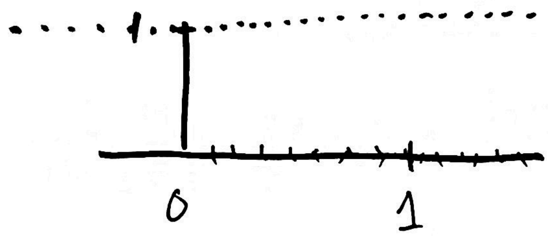
areal $\frac{1}{n} \cdot n^2 = n$



Regionen mellom x-aksen og grafen til $f(x)$ inneholder et rektangel med areal n, for alle $n \geq 1$.

så $\lim_{n\to\infty} N_n = \infty$, så integralet eksisterer ikke.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rasjonal} \\ 0 & x \text{ irrasjonal.} \end{cases}$$

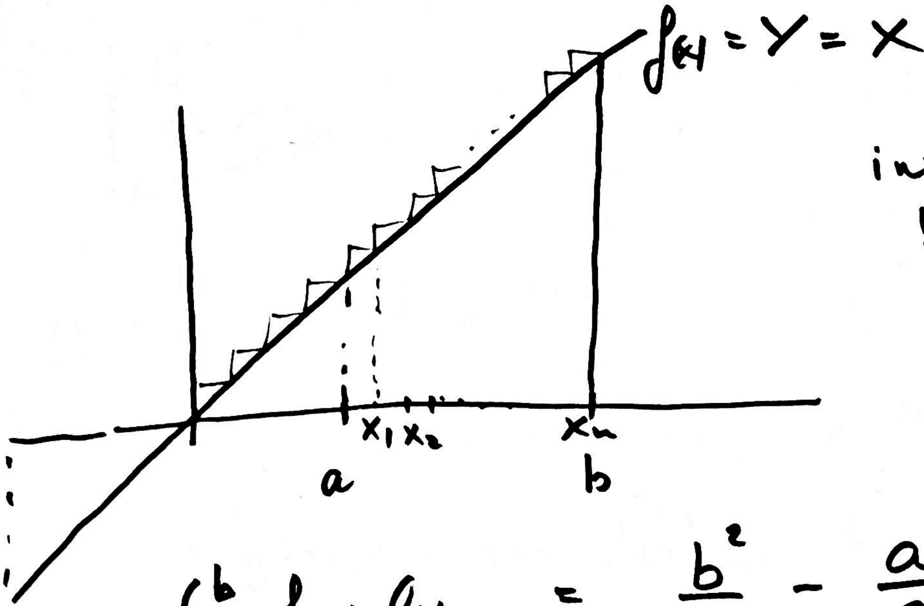


$N_n = 0 \qquad n \geq 1$

$U_n = 1$

$\lim_{n\to\infty} N_n = 0$ og $\lim_{n\to\infty} U_n = 1$.

Integralet eksisterer ikke



intervalbredde

$$\frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

"areal til trekanter"

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \left(a \cdot n + \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\frac{n(n+1)}{2}}\right) \frac{b-a}{n}$$

$$U_n = a \cdot \cancel{n} \frac{b-a}{\cancel{n}} + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{n} \cdot n}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot 1$$

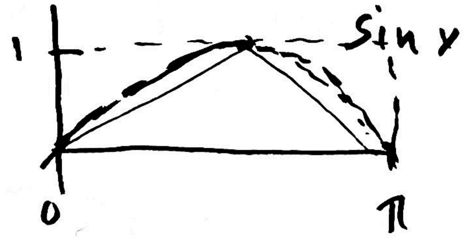
$$= (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$

$$= (b-a)\left(\frac{2a+b-a}{2}\right)$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Tilsvarende $N_n = \ldots$

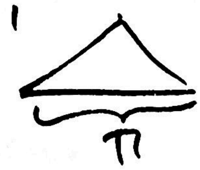
$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$



$1 \geq \sin x \geq 0$ i $[0, \pi]$

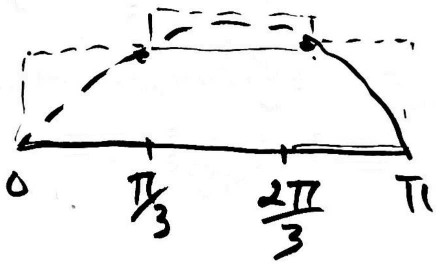
så $0 \leq \int_0^{\pi} \sin x \, dx \leq \pi$

Regionen inneholder trekanten.



så $\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi} \sin x \, dx$

Finner N_3 og U_3



$$N_3 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \sim 0.9$$

$\sin 0 = \sin \pi = 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

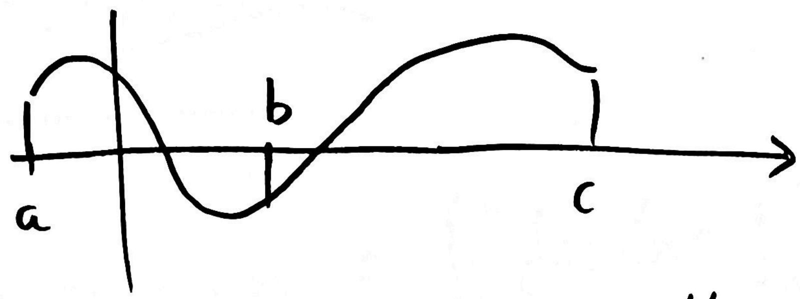
~ 0.866

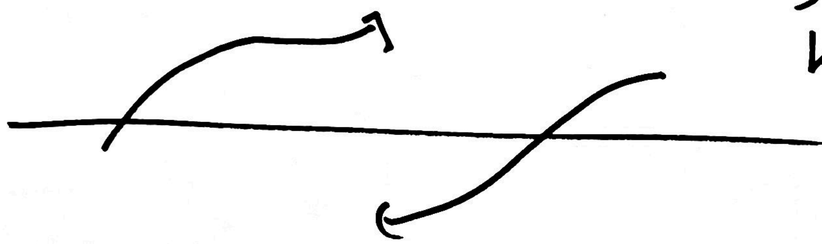
$$U_3 = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \cdot 1$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{3} + 1\right) \sim 2.9$$

Benyttet geogebra til å finne N_n og U_n for $n \leq 100$.

De nærmer seg 2 når n øker.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$





stykkevis kontinuerlig (hoppediskontinuiteter)

Ved å dele opp def. området er alle stykkevis kontinuerlige (og begrensa) funksjoner integrerbare.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

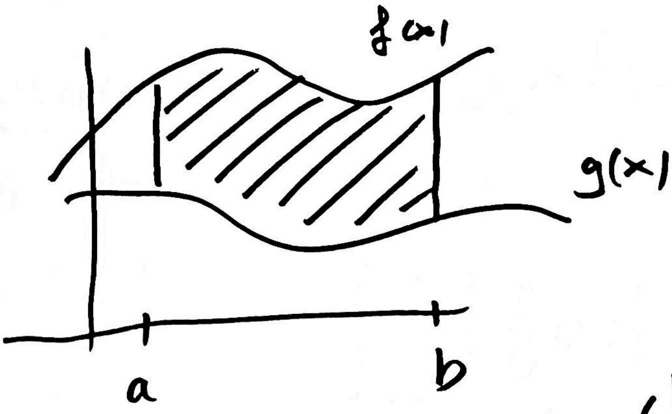
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Bestemte integral er lineære

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

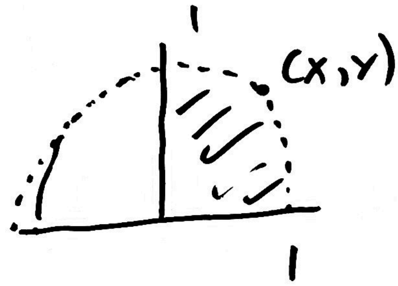
$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Dette følger fra definisjonen.



$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$



$y = \sqrt{1-x^2}$

$y^2 = 1-x^2$

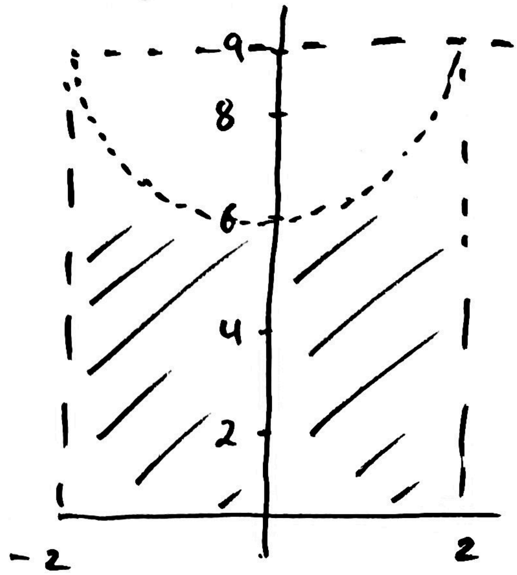
$x^2+y^2 = 1$

Hva er $\int_{-2}^{2} 9 - \sqrt{4-x^2}\,dx$

$= \int_{-2}^{2} 9\,dx - \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

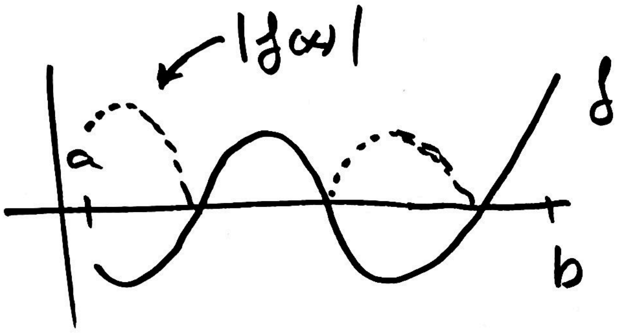
$= 36 - \frac{\pi \cdot 2^2}{2}$

$= \underline{\underline{36 - 2\pi}}$



Arealet mellom grafen til $f(x)$ og x-aksen fra $x=a$ til $x=b$ er lik

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$



Areal mellom grafene til $f(x)$ og $g(x)$:

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$