31 mars
25

Integrasjon

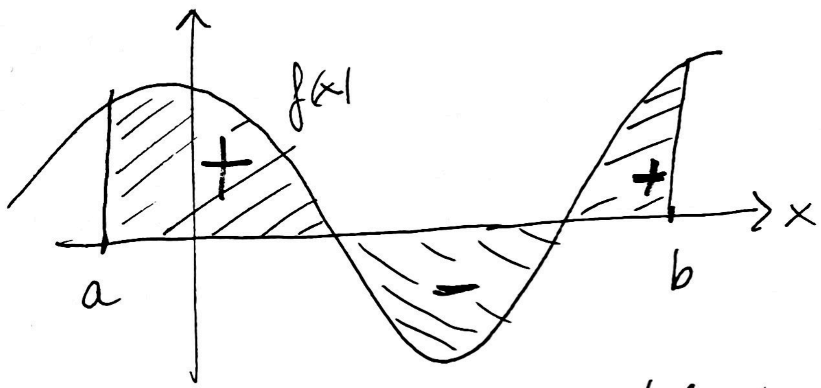
Bestemte integral $\int_a^b f(x)\,dx$ integralet fra a til b av f(x) med hensyn til x.

Ubestemte integral $\int f(x)\,dx$ = de antideriverte til f(x)

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

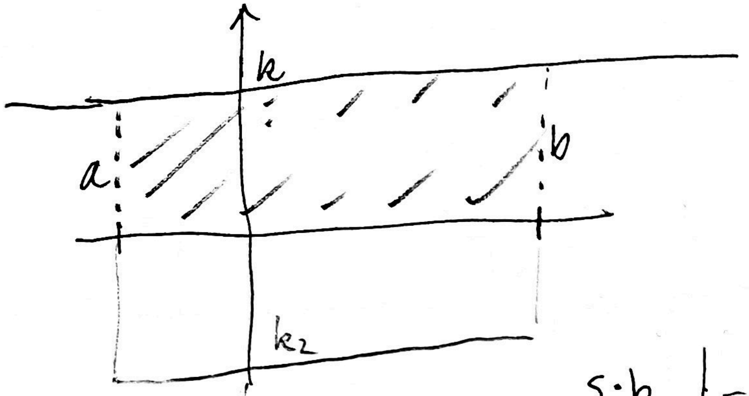
$\int_a^b f(x)\,dx$ tall.

$a < b$



Areal med fortegn mellom grafen til f(x) og x-aksen fra x=a til x=b.

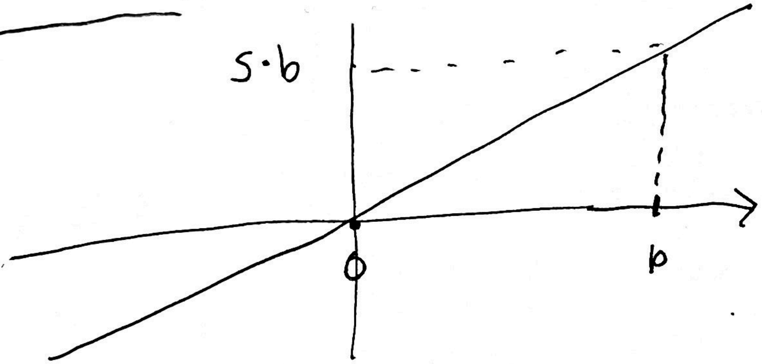
Areal mellom grafen til f(x) og x-aksen fra x=a til x=b er lik $\int_a^b |f(x)|\,dx$



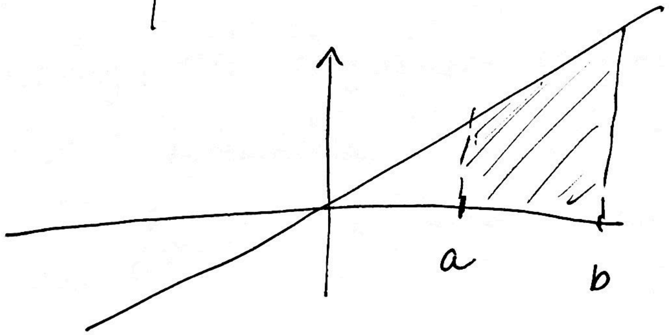
$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

stigningstallet

$Y = 5X$

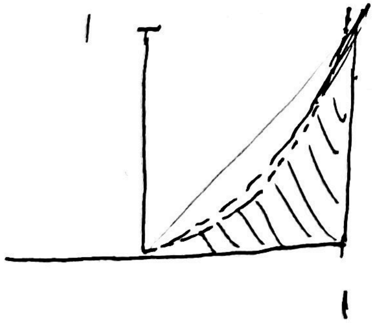


$$\int_0^b 5x\,dx = \frac{5b \cdot b}{2} = \frac{5b^2}{2}$$



$$\int_a^b 5x\,dx = \frac{5}{2}(b^2 - a^2)$$

$a < b$

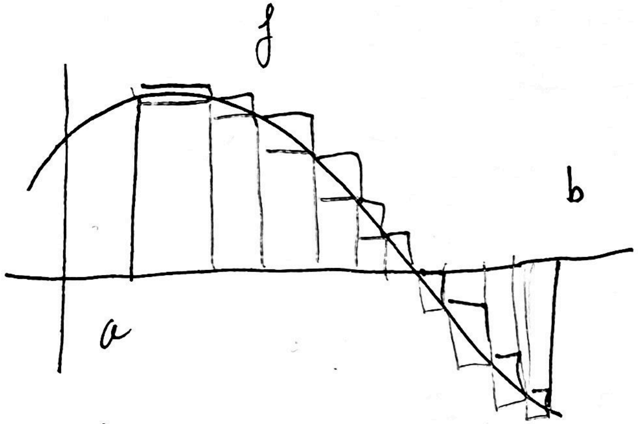


$Y = x^2$

$$0 < \int_0^1 x^2\,dx < \frac{1}{2} \text{ (areal til trekanten)}$$

Benyttet sum nedre / sum øvre / Trapessum til å estimere integralet

$$\int_0^1 x^2\,dx \sim \frac{1}{3}$$



antall oppdelinger n

bredde hvert rektangel $\frac{b-a}{n}$

summen av de røde rektanglene er et nedre estimat for integralet.

Summen av de grønne (øverste) rektangle er et øvre estimat for integralet.

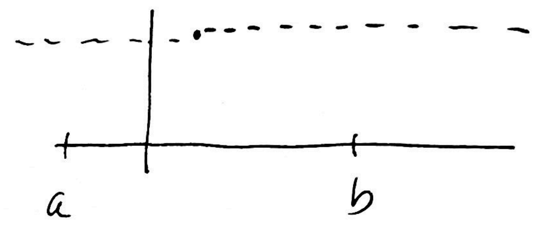
Hvis f er kontinuerlig, vil differansen mellom øvre og nedre estimat gå mot 0 når intervallene $\frac{b-a}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$.

$\int_a^b f(x)\,dx$ = grensen av (nedre) estimat når $n \to \infty$.

Ubestemte integral

$F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$

hvis $F'(x) = f(x)$ (i definisjonsmengden til f)



$F'(x) = 0$

på et intervall

er bare mulig for $F(x) = k$

konstant funksjon.

Hvis F_1 og F_2 er antideriverte til f, da

$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ alle x.

Så $F_1 = F_2 + k$ for en konstant.

$\int f(x)\,dx$ = klassen av alle antideriverte til $f(x)$ $= F(x) + k$ ← konstant.

↑ én antiderivert

$$\int \underset{\uparrow}{\ell}\, dx = \ell \cdot x + k$$

konstant

$$\int 2\, dx = 2x + k$$

$$\int 5x\, dx = \frac{5}{2} x^2 + k$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k$$

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k}$$

$n \neq -1$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(-\cos x)' = \sin x$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + k$$

$$\int e^x dx = e^x + k$$

$$\int 2x\, e^{x^2}\, dx = e^{x^2} + k$$

$$\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2}(2x)$$

kjerneregelen

$$\left.\begin{aligned} &\int u'(x)\, f(u(x))\, dx \\ &= F(u(x)) + k \\ &= \int f(u)\, du + k \end{aligned}\right\}$$

substitusjon (variabelbytte)

$$\left(f(u(x))\right)' = u'(x)\, f'(u(x)).$$

så

F antiderivert til f

$$\left(F(u(x))\right)' = u'(x)\, F'(u(x)) = u'(x)\, f(u(x))$$

kjerneregelen

$$\int \overbrace{x^2}^{\frac{1}{3}u'} \underbrace{(1+x^3)}_{u}{}^5\, dx = \int \frac{1}{3} u' u^5\, dx = \frac{1}{3} \int u^5\, du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + k = \frac{(1+x^3)^6}{18} + k$$

(sjekker svaret : $\left(\frac{(1+x^3)^6}{18}\right)' = \frac{3 \cdot 6 \cdot x^2 (1+x^3)^5}{18}$ ✓)

en gang til $\int \underbrace{2x}_{u'} \underbrace{e^{x^2}}_{e^u} dx = \int e^u du$ $(u'dx \to du)$

$$= e^u + k$$

$$= \underline{e^{x^2} + k}$$

Lignende eksempel $\int \underbrace{2x}_{u'} \underbrace{\sin(x^2)}_{\sin(u)} dx = \int \sin(u) du$

$$= -\cos(u) + k$$

$$= \underline{-\cos(x^2) + k}$$

Produktregelen gir delvis integrasjon

$$\int \underbrace{f' \cdot g + f \cdot g'}_{(f \cdot g)'} dx = f \cdot g + k$$

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx$$

Fundementalteoremet i kalkulus

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

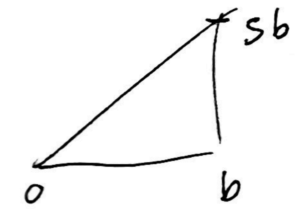
hvor F er en antderivert til f.

<u>Uavhengig</u> av valget av antiderivert:

$(F(x) + k)$ er de antideriverte.

$$(F(b)+k) - (F(a)+k) = F(b) - F(a) \underbrace{+k-k}_{0}$$
$$= \underline{F(b) - F(a)}$$

$$\int_0^b 5x\,dx = 5\frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \underline{\frac{5b^2}{2}}$$

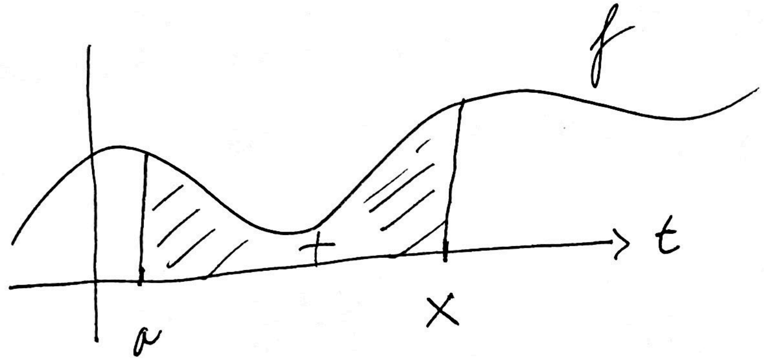


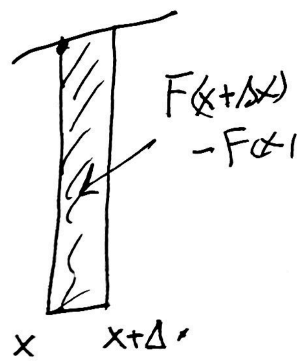
$$\int_a^b 5x\,dx = 5\frac{b^2}{2} - 5\frac{a^2}{2} = \underline{\frac{5}{2}(b^2-a^2)}$$

$n > -1$

$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \underline{\underline{\frac{1}{n+1}}}$$

$n=2$ $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$





$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sim f(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f(x)$$

$$\underline{F'(x) = f(x)}$$

Hvis $G(x)$ er en antiderivert til $f(x)$

$G(x) = F(x) + k$. Siden $F(a) = 0$

så $k = G(a)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = G(b) - k$$
$$= \underline{G(b) - G(a)}$$

Oblig 7

4 og 5d)

Finn summen av inversene til alle naturlige tall som bare er delelig med primtallene 5 og 7 eller.

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{5^n \cdot 7^m} \qquad n, m \geq 1$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cdot \frac{1}{7^m} = \lim_{K\to\infty} \sum_{m,n=0}^{K} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{1}{7}\right)^m$$

$$\left(\prod_{p \text{ primtall}} \left(\frac{p}{p-1}\right)\right)$$

$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{m=0}^{K} \left(\sum_{n=0}^{K} \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^m$$

$$= \lim_{K\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{K} \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \left(\sum_{m=0}^{K} \left(\frac{1}{7}\right)^m\right)$$

$$= \lim_{K\to\infty} \left(\frac{1-(1/5)^{K+1}}{1-1/5}\right) \left(\frac{1-(1/7)^{K+1}}{1-1/7}\right)$$

$$= \frac{1}{1-1/5} \cdot \frac{1}{1-1/7} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{35}{24}$$

$K=3$:

$$\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3}\right)\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3}\right) = \sum_{n,m=0}^{3} \frac{1}{5^n 7^m}$$