24 mars 25

14A og B

n-te ledd

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Rekursive følger

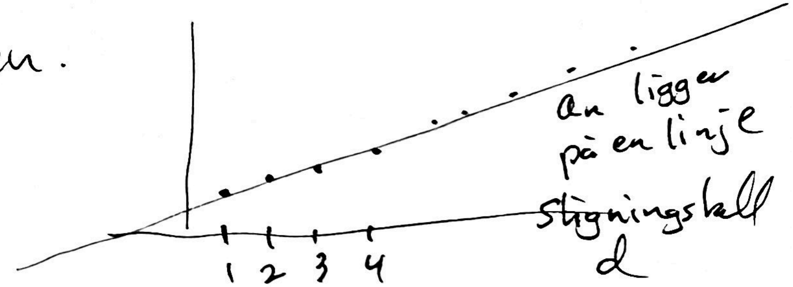
Ledd a_n er bestemt av de foregående leddene.

Av og til kan vi finne en "formel" (uttrykk) for ledd a_n uttrykt ved n.

Aritmetisk følge :

$$a_{n+1} = a_n + d \qquad a_n = a_1 + (n-1)d$$

differansen.



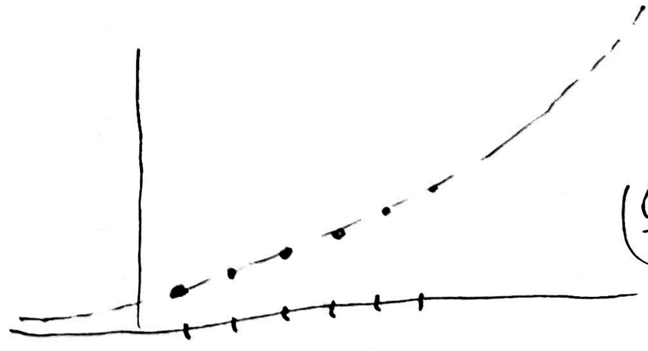
Geometrisk følge :

kvotienten

$$a_{n+1} = k\,a_n$$

$a_n \neq 0$: $k = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

$$a_n = a_1 k^{n-1}$$



Rekursiv følge $\quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 \quad n \geq 1$

$a_1,\ a_2 = a_1,\ a_3 = a_1 + a_2,\ a_4 = a_1 + a_2 + a_3,\ a_5,\ a_6$

$1 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8,\ 16, \ldots$

Det ser ut som $a_n = 2^{n-2}$ for $n \geq 2$
og $a_1 = 1$.

$$a_{n+1} = \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})}_{a_n} + a_n = 2a_n \quad n \geq 2.$$

Geometriske følge

$a_{n+1} = 2a_n$ for $n \geq 2$.

Fibonacci følgen $\quad F_0 = 0,\ F_1 = 1$

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad n \geq 1$

$F_0 = 0$
$F_1 = 1$
$F_2 = 1$
$F_3 = 2$
$F_4 = 3$
$F_5 = 5$
$F_6 = 8$
$F_7 = 13$
$F_8 = 21$
$F_9 = 34$
$F_{10} = 55 \ldots$

Python program

Angitt $\quad$ tall1 = 0 $\quad$ tall2 = 1

tall = tall1 + tall2

oppdaterer tall1 og tall2 til

tall1 = tall2

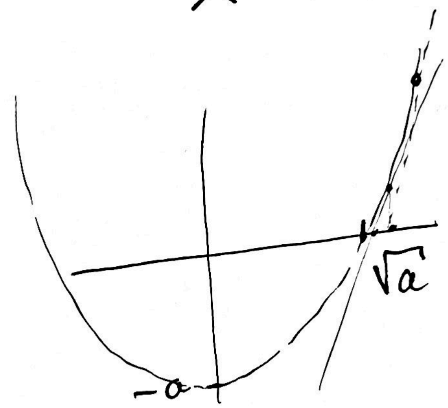
tall2 = tall

i en forløkke.

$$X_{n+1} = \frac{X_n^2 + a}{2X_n} \qquad a > 0$$

$\sqrt{a}$ er den positive løsningen til $x^2 - a = 0$

Newtons metode



følger tangentlinjen ned til x-aksen

Rekker

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}_{n\text{-te delsum } S_n} + \cdots$$

Rekken konvergerer og har sum S hvis følgen av delsummer konvergerer til S.

* $$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

skrevet opp og regnet ut i Python.

Summetegn (Sigma)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_k$$

$$\sum_{k=3}^{11} a_k = a_3 + a_4 + \cdots + a_{11}$$

$$= \sum_{i=1}^{9} a_{i+2}$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots a_{21}$$

$$= \textstyle\sum_{k=0}^{10} a_{1+2k}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$$

Mer om Fibonacci tallene

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \qquad n \geq 0.$$

sant for $n = 0$.
Anta at det er sant for n, vi viser da at det også er sant for $n+1$.

$$\underbrace{F_0 + F_1 + \cdots + F_n}_{F_{n+2} - 1} + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$$
$$= F_{(n+1)+2} - 1 \quad \checkmark$$

Finner en formel for F_n.

$a_n = x^n$ da er $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$
$\Leftrightarrow$ $1 + x = x^2$. samt $x = 0$
$(x^n + x^{n+1} = x^{n+2})$

Løsningene til $x^2 = x + 1$ er
$x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\ldots$$ irrasjonalt tall „det gylne snitt".

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1-\varphi = -0.618 = \frac{-1}{\varphi}$$

$$a_n = x\cdot\varphi^n + y\cdot\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n$$ oppfyller det rekursive kravet $a_{n+1} = a_{n+1} + a_n$.

Finner x og y slik at $a_0 = 0$ og $a_1 = 1$, for da er $\underline{F_n = a_n}$.

$a_0 = x + y = 0$ så $y = -x$

$a_1 = x\cdot\varphi + y\cdot\left(\frac{-1}{\varphi}\right) = 1$

$= x\varphi - x\left(\frac{-1}{\varphi}\right) = 1$ så $x\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) = 1$

$x = \frac{1}{\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right) = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

14.5 a) $14, 11, 8, 5, \ldots$

Det ser ut som $a_{n+1} = a_n - 3$.

Hvis dette er tilfelle så $a_n = 14 + (-3)(n-1)$

$a_n = \underline{17 - 3n}$

b) —

c)

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

$2, 5, 14, 41$

$a_2 - a_1 = 3$

$a_3 - a_2 = 9$

$a_4 - a_3 = 27$

Det kan se ut som

$a_{n+1} = a_n + 3^n$

$a_n = 3^{n-1} + a_{n-2} = 3^{n-1} + 3^{n-2} + a_{n-3}$

$a_n = (3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3) + a_1$

$a_n = \frac{3^n - 3}{3 - 1} + a_1 = \frac{3^n - 3}{2} + a_1$

$a_1 = 2$:

$a_n = \frac{3^n + 1}{2}$

$3 \cdot a_n = \frac{3^{n+1} + 3}{2} = a_{n+1} + 1$

$a_1 = 2$.)

($a_{n+1} = 3a_n - 1$ er oppfylt.

Kombinasjon av aritmetiske og geometriske følge

$d=0$: geometrisk

$k=1$: aritmetisk ✓

$$\underline{a_{n+1} = k a_n + d}$$

$k \neq 1$

$X_n = a_n + b$

velger b slik at

$X_{n+1} = k X_n$

$X_{n+1} = a_{n+1} + b = k X_n = k a_n + k \cdot b$

$\underbrace{a_{n+1}}_{k a_n + d} + b = k a_n + k \cdot b$

$d + b = k \cdot b$

$d = b(k-1)$

$b = \underline{d/(k-1)}$

$X_n = k^{n-1} \cdot X_1 = k^n (a_1 + b)$

$a_n = k^{n-1}(a_1+b) - b = \underline{a_1 k^{n-1} + b(k^{n-1}-1)}$

$\underline{= a_1 k^{n-1} + \frac{d}{k-1}\left(k^{n-1}-1\right)}$ $n \geq 1$