19.03
25

Geometriske følger og rekker

14C

$a_{n+1} = k \cdot a_n$ 　　 k kvotient

eks: $3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots$ 　　 $k = 2$

$4, -2, 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots$ 　　 $k = \frac{-1}{2}$

$$a_{n+m} = k^m a_n$$

$$a_n = k^{n-1} a_1$$

eks. Finn den geometriske følgen slik at $a_2 = 4$ og $a_5 = 32$.

$a_5 = k^3 \cdot a_2$

$32 = k^3 \cdot 4$ 　　 så 　　 $k^3 = 8$

$k = \sqrt[3]{8} = 2$

$2a_1 = a_2 = 4$

$2, \underline{4}, 8, 16, \underline{32}, 64, 128, 256, \dots$

$b_2 = 4$ og $b_4 = 36$. geometrisk følge

$b_4 = k^2 \cdot b_2$

$36 = k^2 \cdot 4$ så $k^2 = \frac{36}{4} = 9$

$k_1 = 3$ og $k_2 = -3$ er løsningene.

I: $\frac{4}{3}, \underline{4}, 12, \underline{36}, 108, \ldots$ To muligheter.

II: $-\frac{4}{3}, 4, -12, 36, -108, \ldots$

$a_1, 0, 0, 0, \ldots$ for alle a_1

$k = 0$

$0, 0, 0, 0, \ldots$ for alle k

$a_1 = 0$

$a_{n+1} = k \cdot a_n$ så $\underline{k = \frac{a_{n+1}}{a_n}}$ kvotient av etterfølgende ledd.

$a_n \neq 0$

P_0 pengemengd ved tiden $t=0$ (år)

r årlig rente

P_t pengemengd etter t år (heltall)

$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$

$P_2 = P_1(1+r) = (1+r)^2 P_0$

$P_n = (1+r)^n P_0$ geometrisk følge.

En følge $a_1, a_2, \dots$ konvergerer til a hvis $a_n \to a$ når $n \to \infty$.

Hvis det ikke finnes en slik a, sier vi at følgen __divergerer__

$1, k, k^2, k^3, \dots$

divergerer hvis $|k| > 1$ og hvis $k = -1$ $(1, -1, 1, 1, -1, \dots)$

konvergerer til 1 hvis $k = 1$

til 0 hvis $|k| < 1$

Geometriske rekker

$$a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \cdots$$

$$a_1 (1 + k + k^2 + k^3 + k^4 + \cdots)$$

Formel for rekken $\underbrace{1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1}}_{n \text{ ledd}} = \begin{cases} \dfrac{k^n - 1}{k-1} & k \neq 1 \\ n & k = 1 \end{cases}$

$n=1$: VS : 1 HS : $\dfrac{k-1}{k-1} = 1$ ✓

$n=2$ VS : $1+k$ HS : $\dfrac{k^2-1}{k-1} = \dfrac{(k+1)(k-1)}{(k-1)} = k+1$ ✓

$n=3$ VS : $1+k+k^2$

HS : $\dfrac{k^3-1}{k-1} = \dfrac{(1+k+k^2)(k-1)}{(k-1)} = 1+k+k^2$ ✓

$k=2$ $1+2+4+8+\cdots+2^{n-1} = \dfrac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1$

$k=-2$ $1-2+4-8+-\cdots+(-2)^{n-1} = \dfrac{(-2)^n-1}{-2-1} = \dfrac{1-(-2)^n}{3}$

$(1+k+k^2+\cdots+k^{n-1})(k-1)$ (konjugatsetningen når $n=2$) $k \neq 1$

$= \begin{array}{l} k+k^2+k^3+\cdots+k^{n-1}+k^n \\ -(1+k+k^2+k^3+\cdots+k^{n-1}) \end{array} = k^n-1$

Deler med $k-1$ på begge sider av likhetstegnet

$$1+k+k^2+\cdots+k^{n-1} = \frac{k^n-1}{k-1}$$

---

oppg. Finn summen til $\frac{4}{3}, 4, 12, 36, 108, 324, 972$

$k=3.$

$$\frac{4}{3}(1+3+3^2+\cdots+3^6) = \frac{4}{3}\left(\frac{3^7-1}{3-1}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}(3^7-1) = 2\left(\frac{3^7}{3}-\frac{1}{3}\right) = 2\cdot 3^6 - \frac{2}{3}.$$

$$= 2\cdot(3^3)^2 - \frac{2}{3} = 2(27)^2 - \frac{2}{3} = 2\underbrace{(20+7)^2}_{400+280+49 = 729} - \frac{2}{3}$$

$$= 2(729) - \frac{2}{3} = 1400 + 58 - \frac{2}{3}$$

$$= \underline{1457.333\ldots}$$

Uendelig geometrisk rekke

$$1 + k + k^2 + k^3 + \cdots$$

n-te delsum $\quad S_n = 1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{k^n - 1}{k-1} & k \neq 1 \\ n & k = 1 \end{cases}$

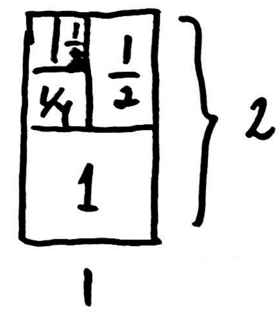
Grensen av følgen av delsumma

konvergerer til $\dfrac{-1}{k-1} = \dfrac{1}{1-k}$ når $|k| < 1$

divergerer for $|k| \geq 1$

$$a_1(1 + k + k^2 + \cdots) = a_1 \cdot \frac{1}{1-k}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1 \cdot \frac{1}{1-1/2} = 2$$



* $\frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \cdots$ geometrisk rekke

Kvotienten er lik $\frac{1}{3}$, så rekken konvergerer.

Summen er lik $\frac{4}{9}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots\right)$

$= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{1-1/3}\right) = \frac{4}{9 \cdot 2/3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

* $1 + 0.99 + (0.99)^2 + (0.99)^3 + \cdots = \frac{1}{1-0.99} = \frac{1}{0.01} = \underline{100}$

* $3\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = 0.333\ldots$

$= \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right)$

$= \frac{3}{10}\left(\frac{1}{1-1/10}\right) = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{9/10}\right) = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

oppg. Finn n-te delsum og summen når $n \to \infty$ (hvis mulig)

$$4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + - \cdots \qquad \text{(geometrisk rekke)}$$

$k = \frac{-1}{2}$

$$S_n = 4\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - + \cdots + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$= 4 \cdot \frac{1-k^n}{1-k} = 4 \, \frac{1-(-1/2)^n}{1-(-1/2)}$$

$$S_n = 4 \cdot \frac{1-(-1/2)^n}{3/2} = \underline{\frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)}$$

Summen til den vendelige rekken er $\underline{\frac{8}{3}}$

* Finn minste antall ledd i $1 + 1.1 + (1.1)^2 + (1.1)^3 + \cdots$ slik at summen blir minst 100.

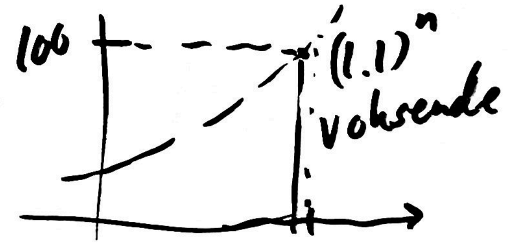
Minste n slik at $S_n \geq 100$.

$$S_n = 1 \cdot \frac{(1.1)^n - 1}{1.1 - 1} = \frac{(1.1)^n - 1}{0.1} = 10\left(\left((1.1)^n - 1\right)\right)$$

$$10\left(\left((1.1)^n - 1\right)\right) \geq 100.$$

$$(1.1)^n - 1 \geq 10$$

$$(1.1)^n \geq 10 + 1 = 11$$



Løser $(1.1)^n = 11$

$$\ln (1.1)^n = \ln 11$$

$$n \ln(1.1) = \ln(11)$$

$$n = \frac{\ln 11}{\ln(1.1)} \sim 25.158\ldots$$

Minste n slik at $S_n \geq 100$ er derfor $\underline{n = 26}$

Rente r (eks $r = 0{,}1 = 10\%$)

Setter inn P_0 årlig i n år. Det går deretter k år.

Hvor mye penger har vi da?

$$(1+r)^k \Big(\underbrace{P_0 + P_0(1+r) + P_0(1+r)^2 + \cdots P_0(1+r)^{n-1}}_{n \text{ ledd}} \Big)$$

$$= (1+r)^k P_0 \, \frac{(1+r)^n - 1}{1+r-1}$$

$$= \underline{P_0 (1+r)^k \, \frac{(1+r)^n - 1}{r}}$$

ØVING

Lån L rente r nedbetales med faste avdrag A i løpet av N år.

Hva er A?

$$(1+r)^N L = A + (1+r)A + (1+r)^2 A + \cdots + (1+r)^{N-1} A$$

(N avdrag)

$$= A\left(1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{N-1}\right)$$

$$= A \frac{(1+r)^N - 1}{1+r-1} = \frac{A}{r}\left((1+r)^N - 1\right)$$

Avdragene:

$$\underline{A = L \cdot r \frac{(1+r)^N}{(1+r)^N - 1}}$$

$L = 1000$ $\quad r = 10\% = 0.1$ og $N = 10$

$A = \underline{163}$

Vist i geogebra variere r og N.