17 mars 25

14 Følger og rekker

(Tall)følger : endlig : $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ (a_i $i = 1, \ldots, n$ er leddene i følgen)

vendelig : $a_1, a_2, a_3, \ldots$

eksempler * posetive oddetall $1, 3, 5, 7, \ldots$ vendelig tallfølge.

$a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_n + 2$

Rekursiv beskrivelse leddene

Formel: $a_n = 2n - 1$ (eksplisitt beskrivelse)

Dette er eksempel på en aritmetisk følge. (generelt $a_n = dn + c$)

* $a_n = \frac{1}{n}$ $1 \leq n \leq 100$ endelig tallfølge

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$ (det må være klart for leseren hva som er utelatt)

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad n \geq 1$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ vendelig tallfølge.

Hva skjer når $n \to \infty$?

En (vendelig) tallfølge $a_1, a_2, \dots$

- <u>konvergerer</u> til A hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = A$
- <u>divergerer</u> hvis $\lim_{n\to\infty} a_n$ ikke eksisterer.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, a_n = \frac{1}{n}, \dots$ konvergerer til 0.

- Følgen av alle positive oddetall (ordnet etter størrelse) divergerer.

$a_n = (-1)^n$ $\quad -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ divergerer.

Rekker

Endelig følge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

Tilhørende rekke : $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ verdien er summen til rekken.

$1, 2, 3, 4$ følge

$1 + 2 + 3 + 4$ rekke.

summen til rekken er 10.

Uendelig følge : $a_1, a_2, a_3, \ldots$

uendelig rekke : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$

Har rekken en sum? Hva er summen?

Følge av delsummer $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \ldots$

$s_n = a_1 + \cdots + a_n$ summen av de n første leddene.

Hvis følgen av delsummer konvergerer til S, da sier vi at →

rekken konvergerer og at den har sum S.
Hvis ikke sier vi at rekken divergerer

* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ $\quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

konvergerer og har sum 2

* $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ $\quad a_n = \frac{1}{n^2}$ konvergere og har sum $\frac{\pi^2}{6}$

* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$ divergerer!

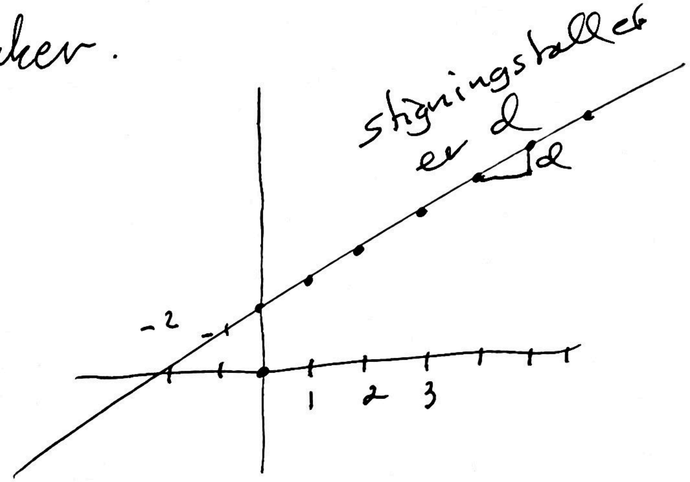
* $a_n = (-1)^{n+1}$ $\quad 1 + (-1) + 1 + (-1) + (1) + (-1) + \cdots$ divergerer.

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + - \cdots$

Følge av delsummer : $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

14C Aritmetiske følger og rekker.

$a_{n+1} = a_n + d$ d differansen.



Aritmetiske følger er bestemt av to ledd.

$\underset{10}{\_}, \underset{7}{\_}, 4, 1, \underset{-2}{\_}, \underset{-5}{\_}, \dots$

a_1 $d = -3$

$a_1 = 10$ og $d = -3$

$\underline{a_n = -3n + 13}$ ← slik at $a_1 = 10 = -3 \cdot 1 + ?$

oppgave

$a_1, a_2 = 4, a_3, a_4 = 7, a_5, \dots, a_n$ Aritmetisk

2.5 ✓ 5.5 ✓ 8.5 $1.5n + 1$

$a_4 - a_2 = 2d$

$7 - 4 = 3 = 2d$ så $d = 3/2 = \underline{1.5}$

$a_n = 1.5n + b$ $\underset{4}{a_4} = \underbrace{1.5 \cdot 2}_{3} + b$ så $b = 4 - 3 = \underline{1}$

$\underline{a_n = 1.5n + 1}$

$$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tester:

	1	$\frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$ ✓
	$1+2 = 3$	$\frac{2\cdot(2+1)}{2} = 3$ ✓
$n=3$:	$1+2+3 = 6$	$\frac{3(3+1)}{2} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$ ✓
$n=4$	$1+2+3+4 = 10$	$\frac{4(4+1)}{2} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$ ✓

Viser dette generelt.

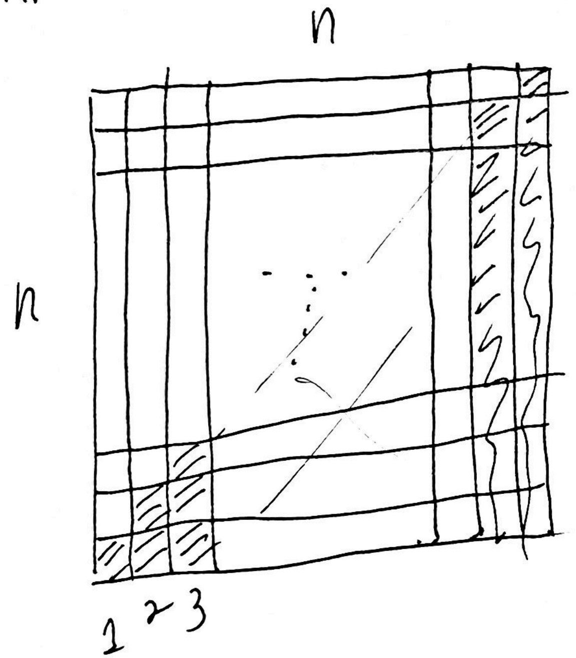
$$S_n = 1+2+3+\cdots+n$$

$$2S_n = \begin{pmatrix} 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \end{pmatrix}$$ snudd rekkefølgen av tallene.

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n} = n(n+1)$$

Så $S_n = 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Alternativt bevis:



Diagonalen: n små kvadrater

+ halvparten av de (n^2-n) gjenstående kvadratene (nedre halvdel)

$$= n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{2n+n^2-n}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{n^2+n}{2}}}$$

$1+2+3+\cdots+100 = 5050 \quad \left(= \dfrac{100\cdot 101}{2} = 50\cdot 101\right)$

$1+2+3+\cdots+921 = \dfrac{922\cdot 921}{2} = \underline{461\cdot 921}$

$O_n = 1+3+5+\cdots+n$

$O_1 = 1 \quad O_2 = 4 = 2^2 \quad O_3 = 9 = 3^2 \quad O_4 = O_3 + 7 = 16 = 4^2 \quad \ldots$

$a_n = 2n-1$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2(1+2+3+\cdots+n) + n(-1)$

$= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n = n(n+1) - n = n^2 + n - n$

$= \underline{\underline{n^2}}$

Summen av de n første positive oddetallene er lik $\underline{\underline{n^2}}$.

$1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots, 100$

$a_n = 3n - 2$

oppgave

Finn summen $1+4+7+\cdots+100$

$3(1+2+\cdots+34) - 2\cdot 34 = 3\,\frac{34\cdot 35}{2} - 2\cdot 34$

$= 34\left(\frac{105}{2} - \frac{4}{2}\right) = 34\left(\frac{101}{2}\right) = 17\cdot 101 = 1700 + 17$

$= \underline{\underline{1717}}$

1

$a_n = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{differansen}}}{d} \cdot n + a_0$ ↑ verdien når $n=0$

$a_7 = 10$ og $a_4 = 4$

$d \cdot 7 + a_0 = 10$

$d \cdot 4 + a_0 = 4$

$a_7 - a_4 = (7-4) \cdot d$

så $d = \frac{a_7 - a_4}{7-4} = \frac{10-4}{7-4} = \frac{6}{3} = 2.$

$a_4 = 2 \cdot 4 + a_0 = 4$ så $a_0 = 4 - 8 = -4.$

$\underline{a_n = 2n - 4}$

$a_1 = 2 - 4 = \underline{-2}$, $a_2 = 2 \cdot 2 - 4 = \underline{0}$

$a_{10} = 2 \cdot 10 - 4 = \underline{\underline{16}}$

$a_{n+1} = a_n + d$ så $d = a_{n+1} - a_n$

2

$$a_n = 2n + a_0$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$$

$$= 2(\underbrace{1+2+3+\cdots 10}_{\frac{10\cdot 11}{2}}) + 10 \cdot a_0 = 10$$

$$= 110 + 10a_0 = 10$$

så $10a_0 = 10 - 110 = -100$

$$\underline{a_0 = -10}$$

$$a_n = 2n - 10$$

$$-8, -6, \ldots\ 6, 8, 10$$

ØVING

Aritmetiske følger

1. $a_7 = 10$ $\quad a_4 = 4$

   Hva er a_1, a_2 og a_{10}?

   a_n ?

2. Differansen er $d = 2$

   og summen av $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ er lik 10.

   Hva er leddene a_n?

3. Finn summen av alle positive tall som er delelig med 7 og mindre enn eller lik 1000.

3 $\quad 7, 14, 21, 28, \ldots\ldots, 994$

$a_n = 7n \qquad n = 1, \ldots, 142.$

$$\left(\begin{array}{l} 100 \cdot 7 = 700 \\ 40 \cdot 7 = 280 \\ 2 \cdot 7 = 14 \\ 142 \cdot 7 = 994 \end{array}\right)$$

$$7 + 14 + \cdots + 994 = 7(1 + 2 + \cdots + 142)$$

$$= 7\,\frac{142 \cdot 143}{2} = \underline{7 \cdot 71 \cdot 143}$$

4 Hvis differansen er -3 og $a_3 = 2$,
hva er da a_1, a_2, a_4 og generelt a_n?

5 Finn a_n hvis $a_3 = 0$ og $a_5 = \sqrt{2}$.

6 Anta $a_{n+1} = a_n + 7$ og $a_{10} = 50$.
Hva er da a_n?

7 Finn summen av alle partall mindre enn eller lik n.

4 $d = -3$ $a_3 = 2$

$(a_n = dn + a_0$
$= -3n + a_0)$

a_1, a_2, a_3, a_4

$8 \quad 5 \quad 2 \quad -1$

$a_n = -3n + 11.$

$\left(a_3 = 2 = -3 \cdot 3 + a_0 \right.$
$\left. \text{så } a_0 = 2 - (-9) = 11 \right)$

5 $a_3 = 0$ og $a_5 = \sqrt{2}$

$a_5 - a_3 = 2 \cdot d$
$\sqrt{2} - 0 = 2 \cdot d$ så $d = \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(n-3) = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} n - \frac{3}{\sqrt{2}}}$

6. Aritmetisk $a_n = 7n + a_0$ og $a_{10} = 7 \cdot 10 + a_0 = 50$
$70 + a_0 = 50$
$a_0 = -20$

$\underline{a_n = 7n - 20}$

$2 + 4 + \cdots + 2m = 2(1 + 2 + \cdots + m)$
$= 2m(m+1)/2 = \underline{m(m+1)}$

7 summen av de m første partallene er

summen av de m første partallene er

n er jevn sum partall $\leq n$ er lik $\underline{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

n er odde $\underline{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}$