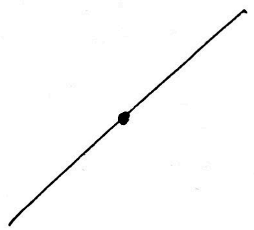
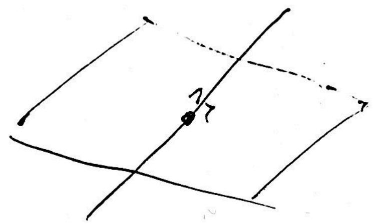
5.3
25

13C Linjer og Plan

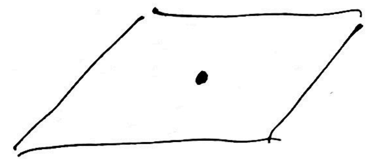


linjer med ett punkt

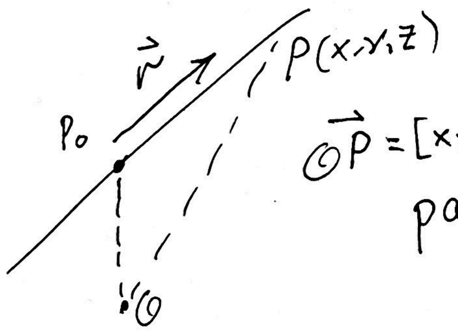


$\longleftrightarrow$

DUALITET

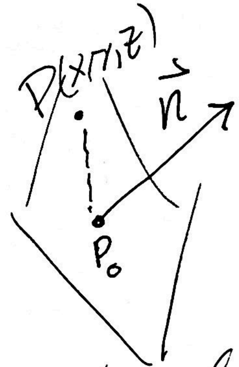


plan med ett punkt



$\vec{OP} = [x,y,z] = \vec{OP_0} + t\vec{r}$

parametrisering av linjen

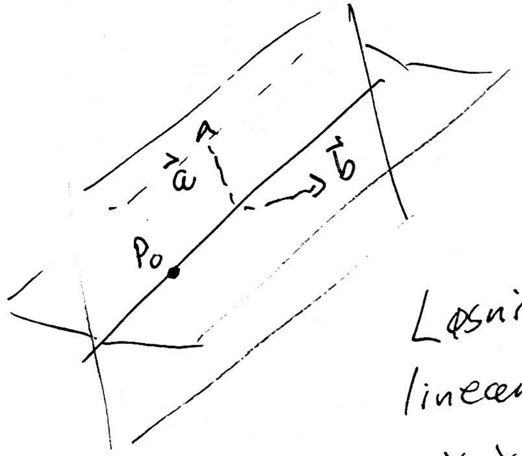


punkt i planet er alle (x,y,z) som er løsningen til

$\vec{P_0P} \bullet \vec{n} = 0$

$\vec{n} = [a,b,c]$

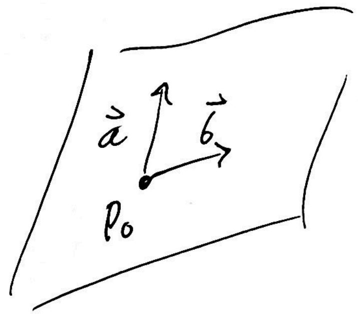
$ax + by + cz = d$



Linje som snittet av to plan.

Løsningene til to lineære likninger i x, y, z.

$\vec{a}, \vec{b}$ normalvektorer til linjen — parallelle ("ligger i") plan



$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + s\vec{a} + t\vec{b}$$
$$s, t \in \mathbb{R}$$

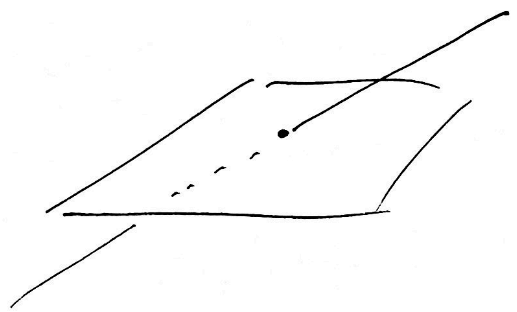
parametrisering

Linje — Plan

* parametrisering med 1 parameter
* Likningssystem med 2 likninger.

* 1 likning
* Parametrisering med 2 parametre

Snitt mellom plan og linje



$\vec{n} = [2, -3, 1]$

Plan $\quad 2x - 3y + z = -1$ Likning

Linje $\quad [x, y, z] = [0, 1, 4] + t[1, 1, -1]$ parametrisering.

Snittpunktet mellom linjen og planet:

setter inn koordinatene til punktene på linjen i likningen for planet

$$2(t) - 3(1+t) + (4-t) = -1$$

$$2t - 3 - 3t + 4 - t = -1$$

$$-2t + 1 = -1$$

$$-2t = -2 \quad | \cdot (-1)$$

$$2t = 2 \quad | \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\underline{t = 1}$$

(setter inn $t = 1$ i parametriseringen for linjen)

linjen

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

Snittpunktet er da $\underline{(1, 2, 3)}$

oppg. Hvor treffer linje gjennom $P_0(-2, 4, 7)$ med retningsvektor $\vec{r} = [-2, 1, 3]$ xz-planet?

Linjen $[x, y, z] = [-2, 4, 7] + t[-2, 1, 3]$ $\quad t \in \mathbb{R}$

xz-planet: $y = 0$ (normalvektor $\vec{e}_2 = [0, 1, 0]$, origo $O\ (0,0,0)$ ligger i planet)

linjen $\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = 7 + 3t. \end{cases}$

setter inn punktene på linjen i likningen for planet.

$\underbrace{4 + t}_{y} = 0$ så $t = -4$

snittpunktet er da (setter $t = -4$ inn i parametiseringen)

$\underline{(6, 0, -5)}$

Snitt av to plan
er typisk
én linje.

$$3x - y = 7$$
$$x + 2y + 3z = 9$$

$$y = 3x - 7$$
$$x + 2(3x - 7) + 3z = 9$$
$$7x - 14 + 3z = 9$$
$$z = \frac{23 - 7x}{3}$$

$$\left[x,\ 3x - 7,\ \frac{23 - 7x}{3}\right] \qquad x \in \mathbb{R}$$

Parametrisering av snittlinjen

$$\begin{cases} x \\ 3x - 7 \\ (23 - 7x)/3 \end{cases}$$

Alternativt : En retningsvektor til snittlinjen er en vektor som er ~~normal~~ ortogonal til normalvektorene til plana.

Vi kan finne en slik vektor som vektorproduktet av normalvektorene :

$$\vec{r} = [3, -1, 0] \times [1, 2, 3]$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right]$$

$$\vec{r} = [-3, -9, 7]$$

$3x - y = 7$

$x + 2y + 3z = 9$

Vi finner nå et felles punkt på de to linjene.

prøver med $x = 0$: $-y = 7$ så $y = -7$

$$0 + 2(-7) + 3z = 9$$
$$3z = 9 + 14 = 23$$
$$z = \frac{23}{3}.$$

$(0, -7, \frac{23}{3})$ ligger på linjen.

parametrisering $[x, y, z] = [0, -7, \frac{23}{3}] + t[-3, -9, 7]$

Oppg. To plan er gitt ved

$$x + 2y - z = 2$$
$$-2x + y + 3z = 2$$

beskriv snittlinjen ved en parametrisering.

$\vec{n}_1 = [1, 2, -1]$

$\vec{n}_2 = [-2, 1, 3]$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$$\underline{\vec{r} = [7, -1, 5]}$$

Prøver å finne en løsning:
setter $z = 0$
(snitt med xy-planet og planene våre.)

$x + 2y = 2$
$-2x + y = 2$

$x = 2 - 2y$ så

$-2(2-2y) + y = 2$
$-4 + 4y + y = 2$
$5y = 6$
$y = \frac{6}{5} = 1.2$
$x = 2 - 2 \cdot y = 2(1-y)$
$= \frac{-2}{5} = -0.4$

Et punkt på linjen er $\left(-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, 0\right)$

Parametrisering av snittlinjen $[x, y, z] = \underline{\left[-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, 0\right] + t[7, -1, 5]}$

Snitt mellom 2 linjer

parallelle forskjellige : snittet er tomt

parallelle og like : snittet linjene selv

ikke parallelle

- "vindskeive" møtes ikke : snittet er tomt.
- ligger i et felles plan : snittet er et punkt.

To linjer

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 2s \\ y = 1 + s \\ z = k - s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

k en parameter.

1) Møtes linjene når $k = 1$?

2) Er linjene parallelle ?

3) Finn en verdi for k slik at linjene møtes (hvis mulig).

Snittet mellom linjene er koordinater slik at

$$x = 2 - t = 2s$$
$$y = 3 + t = 1 + s$$
$$z = 3t = k - s$$

2 variable s og t (k fast)
3 likninger.

y koordinater like: $s = 2 + t$

x — " —: $2 - t = 2s = 2(2+t) = 4 + 2t$

$2 - 4 = 2t + t$

$-2 = 3t$

$\underline{t = -2/3}$

$s = 2 + t = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \underline{\underline{4/3}}$

De to z-koordinater er da $z = 3 \cdot t = -2$

og $z = k - s = k - 4/3$.

1) $k = 1$ så er z-koordinatene ved $(x, y) = (8/3, 7/3)$ er $z = -2$, $z = 1 - 4/3 = -1/3$ forskjellige

Linjene møtes ikke når $k = 1$.

2) Ikke parallelle siden retningsvektorene er $[-1, 1, 3]$ og $[2, 1, -1]$

3) Linjene møtes når de to z-verdiene med $x = 8/3$ og $y = 7/3$ er like.

$$-2 = k - 4/3$$
$$k = \frac{4}{3} - 2 = \frac{4}{3} - \frac{6}{3} = \underline{\frac{-2}{3}}$$

Møtes når $k = -2/3$. De møtes da i
$$\underline{\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, -2\right)}$$

Oppg Finn snittet mellom plana $-x + 3z = y$ og $x + 2y - z = 1$

$$-x - y + 3z = 0$$
$$x + 2y - z = 1$$

normalvektor $[-1, -1, 3]$
$[1, 2, -1]$

prøver med $z = 0$
$$-x - y = 0$$
$$x + 2y = 1$$

$L_1 + L_2$: $y = 1$ og $x = -1$

$(-1, 1, 0)$ ligger på snittlinjen.

En retningsvektor til snittlinjen er

$$[-1,-1,3] \times [1,2,-1]$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [1-6, -(1-3), -2-(-1)]$$

$$= \underline{[-5, 2, -1]}$$

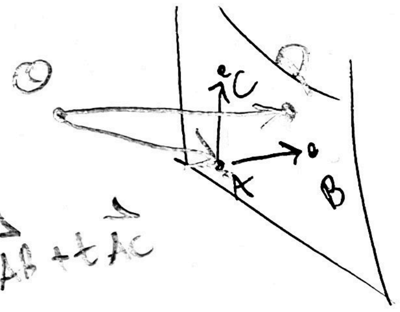
En parametrisering for snittlinjen er

$$\underline{[x,y,z] = [-1,1,0] + t[-5,2,-1]} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$

Likning og parameterfremstilling til planet gjennom A, B og C.

A(1,1,0)
B(2,4,0)
C(2,2,4)



$\vec{AP} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [1,3,0]$.
$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \cancel{[0,-2,4]}\ [1,1,4]$
ligger i planet.

parametrisering

$[x,y,z] = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$
$= [1,1,0] + s[1,3,0] + t[1,1,4]$.

Likning

normalvektor $\vec{n} = [1,3,0] \times [1,1,4]$
$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = [12,-4,-2]$
$= 2[6,-2,-1]$ ✓

$6x - 2y - z = 6\cdot 1 - 2\cdot 1 - 0$
$\underline{6x - 2y - z = 4}$