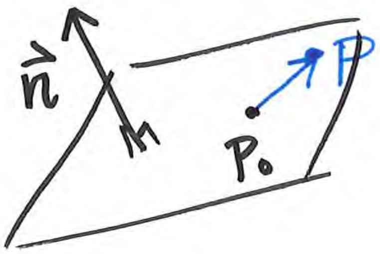
4 mars 25

# 13B Plan

(1) Et plan er bestemt av en normalvektor og et punkt i planet.



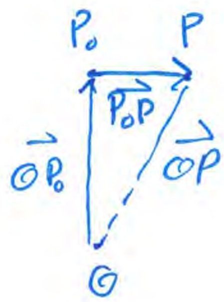

P ligger i planet $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$

$P(x, y, z)$

$\overrightarrow{OP} = [x, y, z]$

$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$




$(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot \vec{n} = 0$

$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OP_0} \cdot \vec{n}$

$\vec{n} = [a, b, c] \quad (\neq \vec{0})$

$$\underbrace{[x, y, z]}_{\overrightarrow{OP}} \cdot \underbrace{[a, b, c]}_{\vec{n}} = [x_0, y_0, z_0] \cdot [a, b, c]$$

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$

Løsningen til likningen består av punktene $(x, y, z)$ i planet vinkelrett på $\vec{n} = [a, b, c]$ og inneholder $P_0$ slik at likningen er oppfylt

$d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

(2) xy-planet : normalvektor $[0,0,1] = \vec{e}_3$

$O = (0,0,0)$ ligger i planet

$$\underline{z = 0}$$

Alle punkt $(x, y, 0)$ $x, y \in \mathbb{R}$.

---

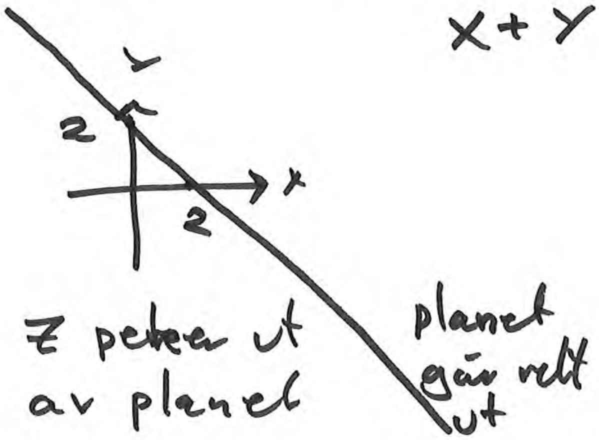
$$ax + by + cz = d$$

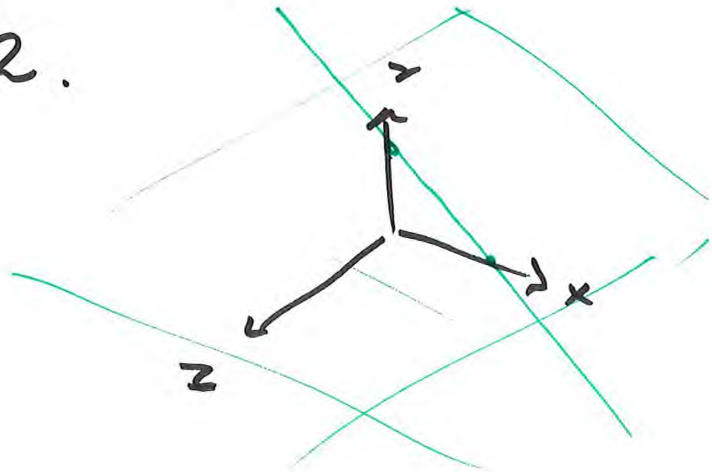
$d = 0 \iff$ origo ligger i planet.

---

Skisser planet gitt ved

$$x + y = 2.$$




oppg. Finn en likning for planet med normalvektor $[2, -4, 6]$ som går gjennom $P_0(1, 1, -1)$.

$$[x, y, z] \cdot [2, -4, 6] = d$$

$$2x - 4y + 6z = d$$

setter inn $(x, y, z) = (1, 1, -1) = P_0$

$2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 6(-1) = d$ så $\underline{d = -8}$

(3) $2x - 4y + 6z = -8$

(skalerer med $\frac{1}{2}$)

$x - 2y + 3z = -4$

Ligger punktene $(1, 2, 1)$

$(3\ 2, -1)$ i planet?

setter inn $(1,2,1)$ for $(x,y,z)$:

$1 - 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 0 \neq -4$

så $(1,2,1)$ ligger ikkje i planet.

setter inn $(3,2,-1)$:

$3 - 2(2) + 3(-1) = -4$ ✓

så $(3,2,-1)$ ligger i planet.

oppg Finn en normal vektor

til planet $3x - 9y + 12z = 15$

og finn ett punkt i planet.

$[3, -9, 12]$ er en normalvektor

$= 3[1, -3, 4]$

en annen normalvektor $[1, -3, 4]$.

$P(-4, 1, 3)$

$3(-4) - 9(1) + 12\cdot 3$

$-12 - 9 + 3\cdot 12 = 2\cdot 12 - 9$

$= 24 - 9 = \underline{15}$ ✓

( $(1, +1, 1)$ $3 - 9 + 12 = 6$ ligger ikkje i planet )

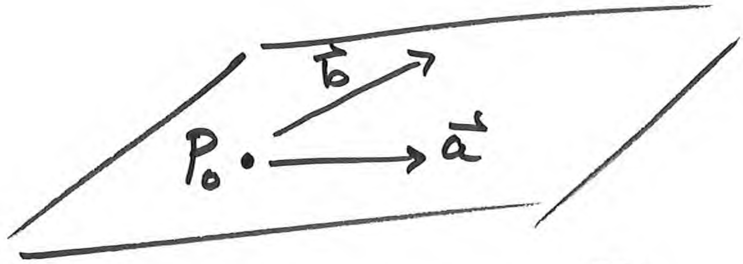
④ $(5,0,0)$ ligger i planet.

(setter $x=y=0$ : $12z=15$

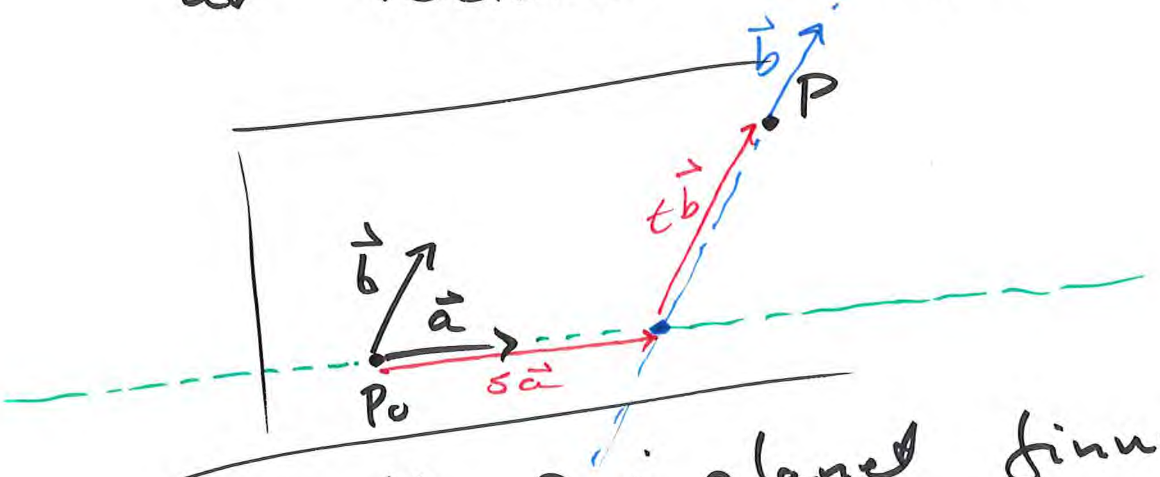
$$z=\frac{15}{12}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 3}=\underline{\frac{5}{4}}$$

$(0,0,\frac{5}{4})$ ligger i planet.

Parametrisering




planet gjennom $P_0$ utspent av vektoren $\vec{a}$ og $\vec{b}$ (ikke parallelle)




For alle $P$ i planet finnes entydige skalarer $s$ og $t$ slik at

$$\overrightarrow{P_0P}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0}=\ldots$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+s\vec{a}+t\vec{b}$$

$s,t\in\mathbb{R}$

Parametrisering av planet

(5) $P_0 = (3, -5, 11)$

$\vec{a} = [2, -4, 7]$

$\vec{b} = [1 \quad 0, 3]$

$$[x, y, z] = \underbrace{[3, -5, 11]}_{\vec{OP_0}} + \underbrace{s[2, -4, 7]}_{s \cdot \vec{a}} + \underbrace{t[1, 0, 3]}_{t \cdot \vec{b}}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2s + t \\ y = -5 - 4s \\ z = 11 + 7s + 3t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

---

Oppg Gitt en parametrisering av et plan

$$\begin{cases} x = 2s - 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = 7 + s - t \end{cases}$$

1) Finn tre punkter i planet

2) Finn to vektorer som utspenner planet

(to vektorer som ligger i ~~parallelle~~ ~~til~~ planet, som ikke er parallelle)

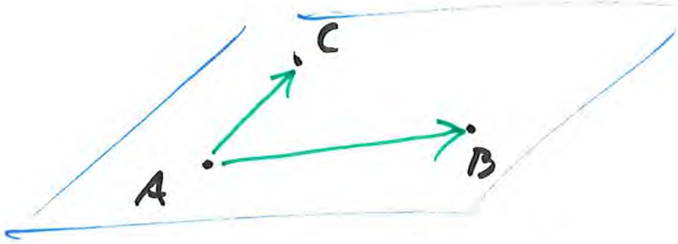
1) $(0, 5, 7)$, $(2, 5, 8)$, $(-3, 3, 6)$

$s = t = 0$ $\quad s = 1, t = 0$ $\quad s = 0, t = 1$

2) $[x, y, z] = [0, 5, 7] + s[2, 0, 1] + t[-3, -2, -1]$.

To vektorer som utspenner planet er $[2, 0, 1]$ og $[3, 2, 1]$.

6




Tre punkter som ikke ligger på en linje bestemmer entydig et plan (som inneholder punktene)

Planet er det som inneholder A og som er utspent av $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$.

Gitt $A(1,2,0)$ og $B(3,1,2)$
$C(-2,0,1)$

Parametrisere planet gjennom A, B og C

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [3,1,2] - [1,2,0]$$
$$= [2,-1,2]$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [-2,0,1] - [1,2,0]$$
$$= [-3,-2,1]$$

P ligger i planet

$$\vec{OP} = [x,y,z] = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$$

$$[x,y,z] = [1,2,0] + s[2,-1,2] + t[-3,-2,1].$$

Vi skal nå finne en likning for planet.

⑦ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ er en normalvektor til planet.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$\vec{i} = \vec{e}_1 = [1,0,0]$
$\vec{j} = \vec{e}_2 = [0,1,0]$
$\vec{k} = \vec{e}_3 = [0,0,1]$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (-1-(-4))\vec{i} - (2-(-6))\vec{j} + (-4-3)\vec{k}$$

$$= 3\vec{i} - 8\vec{j} - 7\vec{k}$$

$= [3, -8, -7]$. står normalt på planet.

Planet er på formen

$$3x - 8y - 7z = d$$

Siden $A(1,2,0)$ ligger i planet

så er $3\cdot 1 - 8\cdot 2 - 7\cdot 0 = d$

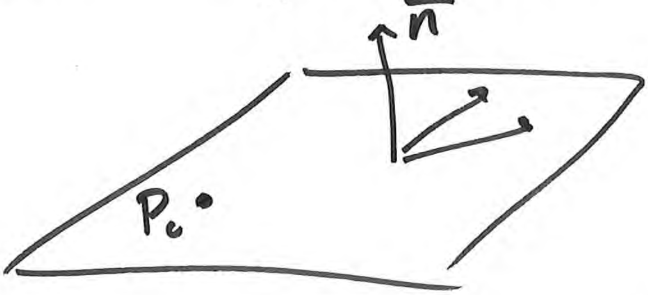
så $d = -16 + 3 = -13$

$$\underline{3x - 8y - 7z = -13}$$

Finn en parametrisering av planet $x - 2y + 5z = 4$.

En normalvektor er $\vec{n} = [1, -2, 5]$

Et punkt i planet er : $(0, -2, 0)$.




søker to vektorer som er ortogonale til $\vec{n} = [1, -2, 5]$

$\vec{a} = [2, 1, 0]$ ✓

$\vec{b} = [1, 3, 1]$ ✓

En parametrisering er

$$[x, y, z] = [0, -2, 0] + s[2, 1, 0] + t[1, 3, 1]$$

$s, t \in \mathbb{R}$.