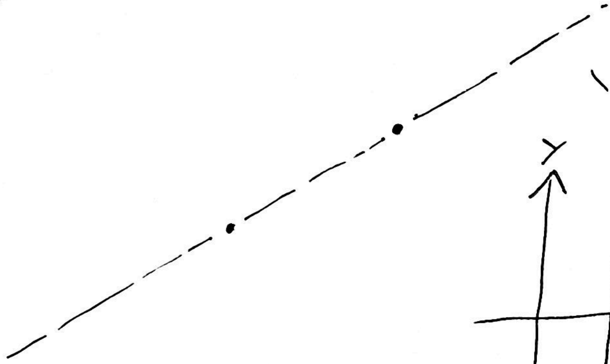
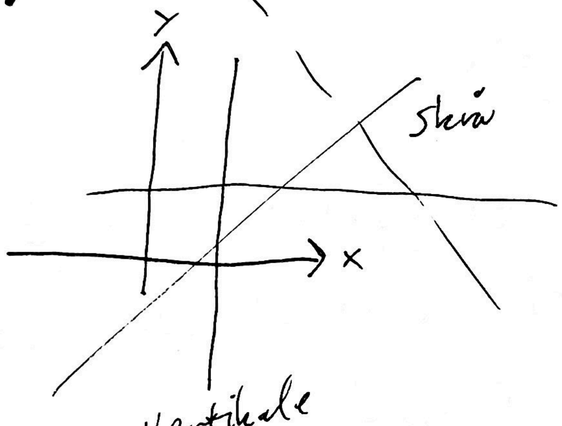
3 mars 25

# 13A Linjer i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.



Det går én linje gjennom to ulike punkt.



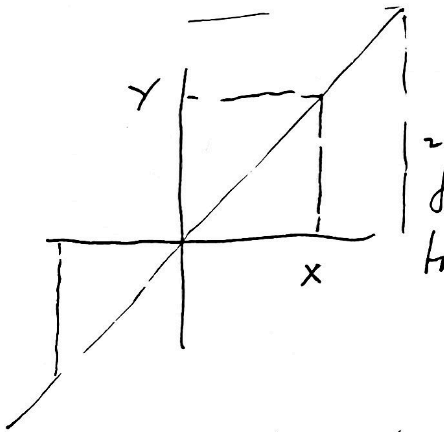

$y = ax + b$ skrå

$b$ snittet med $y$-aksen

$a$ stigningstallet

$x = c$ vertikale linjer.

(løsningen $(c, y)$ for alle $y$)

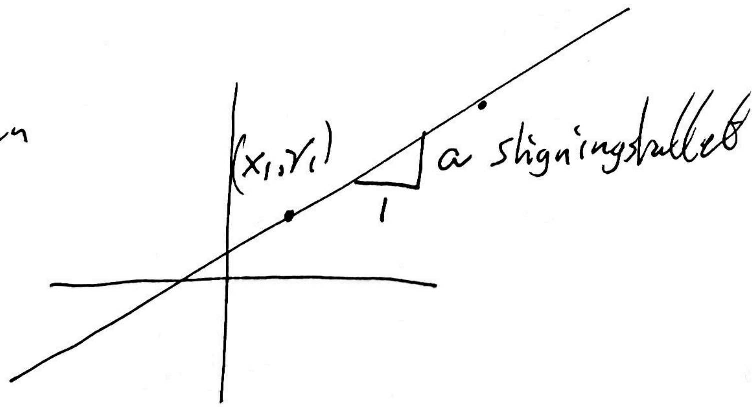



"formlike trekanter"

$\frac{y}{x} = a$ lik for alle $(x,y)$ på linjen $(x \neq 0)$

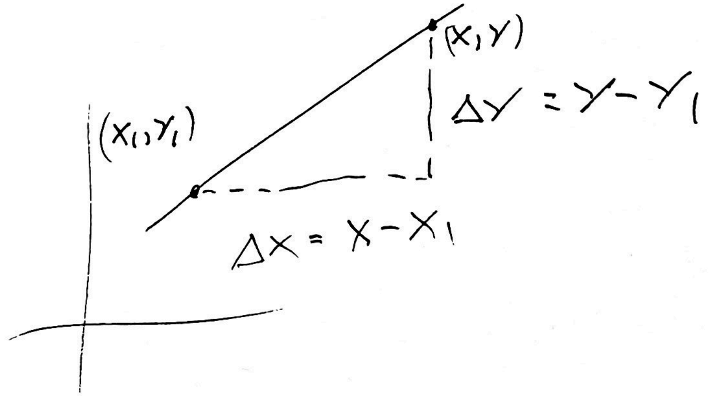
$y = a \cdot x$ (også sant for $x = 0$)

Ettpunktsformelen




Linjen gjennom $(x_1, y_1)$ med stigningstall $a$ er grafen til

$$y = a(x - x_1) + y_1$$




$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a$$

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

(også sant for $x = x_1$)

$$\underline{y = a(x - x_1) + y_1}$$

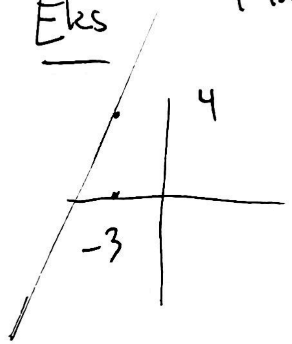
Gitt to punkt $(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$ (ulike)

$x_1 = x_2$ vertikal linje gitt $x = x_1$

$x_1 \neq x_2$ stigningstallet $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ettpunktsformelen $y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1) + y_1$

Eks




Finn linjen gjennom $(-3, 4)$ og har stigningstall lik 5

$$y = 5(x - (-3)) + 4 = 5x + 15 + 4$$

$$\underline{y = 5x + 19}$$

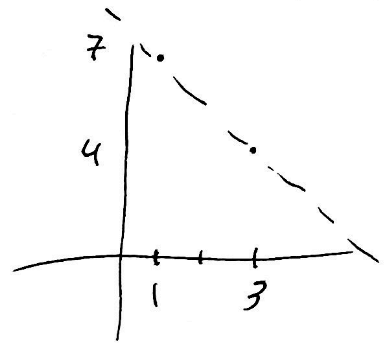
linjen møter $y$-aksen i $y = 19$

Treffer $x$-aksen når $y = 0$ : $0 = 5x + 19$ så $x = \frac{-19}{5}$

$$= -3 - \frac{3}{5}$$

$$= \underline{-3.6}$$

* Finn linjen gjennom $(1,7)$ og $(3,4)$




Stigningstallet $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-7}{3-1} = \frac{-3}{2}$

$$y = \frac{-3}{2}(x-1)+7 = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + 7$$

$$\underline{y = \frac{-3}{2}x + \frac{17}{2}}$$

* Finn linjen gjennom $(1,7)$ og $(1,-13)$.

Linjen er vertikal : $\underline{x = 1}$

Oppg.

$y = 12x - 3$

Hvor treffer linjen y-aksen ? $\underline{y = -3}$

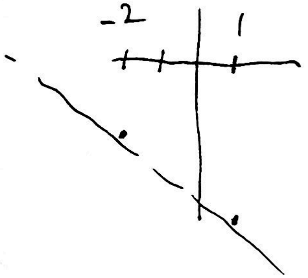
x-aksen ? $\underline{x = 1/4}$

x-aksen er der hvor $y=0$ : $y = 0 = 12x - 3$

$$\frac{12x}{12} = \frac{-3}{12}$$

$$x = \frac{3}{12} = \frac{3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Finn linjen gjennom $(-2,-3)$ og $(1,-7)$




Stigningstallet er: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-7-(-3)}{1-(-2)} = \underline{\frac{-4}{3}}$

$$y = \frac{-4}{3}(x-1) + (-7) = \frac{-4}{3}x + \frac{4}{3} - \frac{7\cdot 3}{3}$$

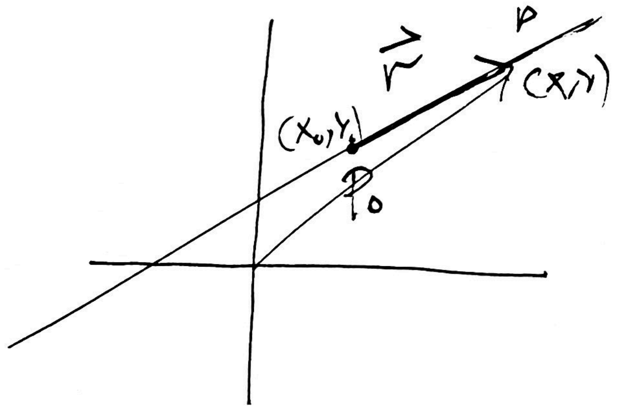
$$\underline{y = \frac{-4}{3}x - \frac{17}{3}}$$

Parametrisering

$$\vec{OP} = [x,y] = \vec{OP_0} + t\cdot\vec{r}$$

parameter ($t$)

retningsvektor ($\vec{r}$).




$P_0 = (1,-2)$ $\quad \vec{r} = [4,5]$.

$$[x,y] = [1,-2] + t\vec{r}$$
$$= [1,-2] + t[4,5] = \underline{[1+4t, -2+5t]}$$

Alternativ beskrivelse $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = -2+5t \end{cases}$.

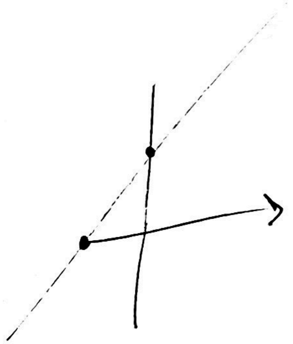
En linje er gitt ved $\begin{cases} x = -3 + 7s \\ y = 4 + 14s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

Ett punkt på linjen er $(-3, 4)$ $(s=0)$

$((4, 18)$ $(s=1)$ etc$)$

En retningsvektor er $[7, 14] = 7[1, 2]$.

1) Hvor treffer denne linjen $x$ og $y$-aksene?
2) Ligger punktene $(-10, -10)$ og $(1, 3)$ på linjen?
3) Beskriv linjen som grafen til $y = ax + b$.
hva er $a$ og $b$?



1) $x = -3 + 7s = 0$ gir $s = 3/7$.
Da er $y = 4 + 14 \cdot \frac{3}{7} = 4 + 2 \cdot 3 = \underline{10}$

Treffer $y$-aksa i $\underline{y = 10}$

$y = 0 = 4 + 14s$ så $s = \frac{-4}{14} = \frac{-2}{7}$
$-4 = 14s$

Da er $x = -3 + 7\left(\frac{-2}{7}\right) \underline{= -5}$

Treffer $x$-aksen i $\underline{x = -5}$.

2) $x = -3 + 7s = -10$ gir $s = -1$

Da er $y = 4 + 14(-1) = -10$ ✓

så $(-10, -10)$ ligger på linjen

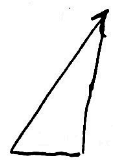
$x = -3 + 7s = 1$ så $7s = 1 - (-3) = 4$

og $s = \frac{4}{7}$

Da er y-koordinaten $4 + 14\left(\frac{4}{7}\right) = 12 \neq 3$

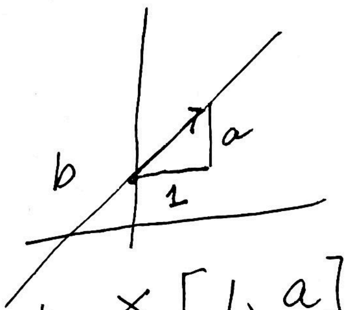
så $(1,3)$ ligger ikke på linjen.

3) $y = ax + b$ fra del 1 så er $b = 10$ (snitt ved y-aksen)

En retningsvektor $[1, 2]$  stigningstallet er $a = 2$

$$\underline{y = 2x + 10}$$

$y = ax + b$

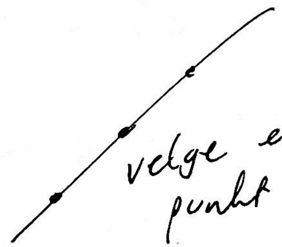


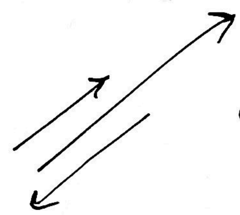

$\vec{r} = [1, a]$

$[x, y] = [0, b] + x[1, a]$

parametrisering
med x-koordinaten
til punktene på en skrå linje.

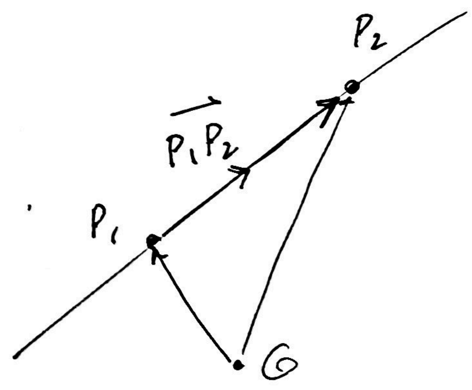
Mange parametriseringer av en linje





forskjellige
retningsvektorer

velge et
punkt på linjen.




oppgave parametriser linjen i rommet gjennom $P_1(0,2,3)$ og $P_2(4,0,5)$.

En retningsvektor $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$

$= [4-0, 0-2, 5-3]$

$= [4, -2, 2] = 2\underline{[2, -1, 1]}$

Velger $\vec{r} = [2,-1,1]$ som retningsvektor.

Velger punktet $P_1$

$$[x,y,z] = \vec{OP_1} + t\vec{r}$$
$$= [0,2,3] + t[2,-1,1].$$

$$l = \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Hvor treffer linjen $xy$-planet?

Det skjer når $z$-koordinaten er lik 0.

$z = 3 + t = 0 \quad : \quad t = -3$

$xy$-koordinatene er da

$x = 2 \cdot (-3) = -6$

$y = 2 - (-3) = 5$

Linjen treffer $xy$-planet i $\underline{(-6,5,0)}$

Oppgave  Gitt en parametrisering av en linje

$$l = \begin{cases} x = 5 - 7s \\ y = 13 \\ z = 21s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

1) Finn et punkt på linjen.

2) Finn en retningsvektor for linjen.

$$[x, y, z] = [5, 13, 0] + t[-7, 0, 21].$$

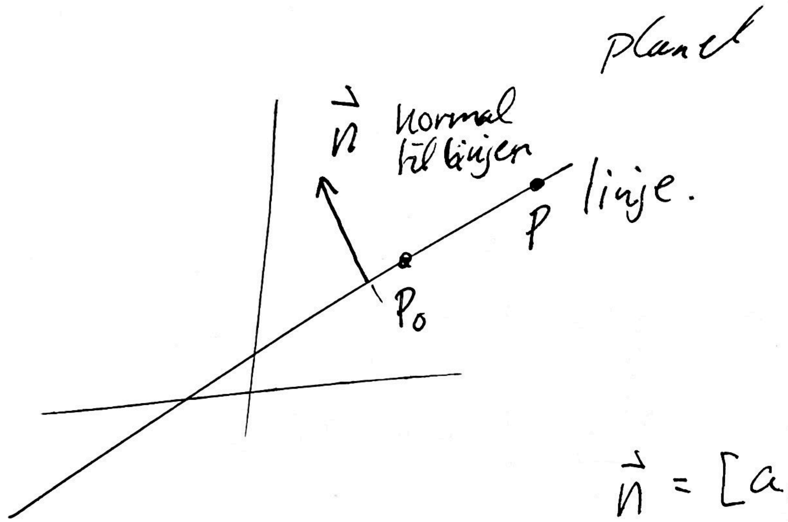
1) $t = 0$  $(5, 13, 0)$

( $t = 1$  $(-2, 13, 21)$  et annet punkt )

2) $[-7, 0, 21] = -7[1, 0, -3]$. er en retningsvektor.

$[1, 0, 3]$ er en annen (enklere) retningsvektor.

Alle retningsvektorer er på formen $k[1, 0, 3]$
$k \neq 0$
reelt tall.




$P$ ligger på linjen $\iff \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$ (samt $P = P_0$)

$\iff \overrightarrow{P_0P} \bullet \vec{n} = 0$

$\vec{n} = [a, b]$.

$\overrightarrow{OP} = [x, y]$

$\overrightarrow{OP_0} = [x_0, y_0]$

$\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0]$

$\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = [a, b] \bullet [x - x_0, y - y_0] = 0$

$= ax + by = (ax_0 + by_0)$

Linjer er beskrevet som løsningene til $[a, b] \neq \vec{0}$.

$$\underline{ax + by = c}$$

(når $b \neq 0$ kan løses for $y$: $by = -ax + c$

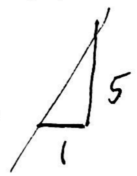
$y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$)

# ØVING

13.3 $\quad y = 5x - 8 \qquad$ Finn to parameterfremstillingen av linjen

setter $x=0 \quad y = 5\cdot 0 - 8 = -8 \quad$ så $(0,-8)$ er på linjen.

$x=2 \quad y = 5\cdot 2 - 8 = 2 \quad$ — $\quad (2,2)$ ———

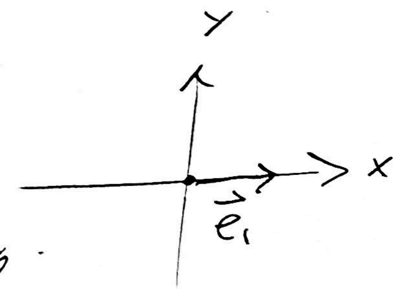
Stigningstallet er 5 :  $\quad [1,5]$ er en retningsvektor

alle retningsvektorer er $k[1,5]$. $\quad k \neq 0$.

1) $[x,y] = [0,-8] + t[1,5]$

2) $[x,y] = [2,2] + s[1,5]$

13.4 a) Parameterfremstill x- og y-aksene i xy-planet



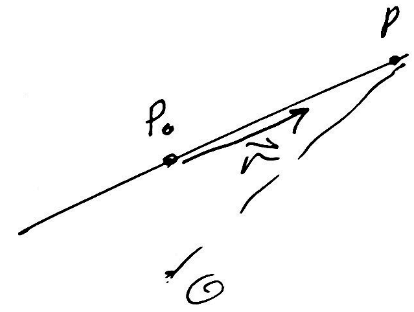

x-aksen $\quad x = 0 + t$ og $y = 0 \qquad$ en annen parameterfremstilling er $[x,y] = [7,0] + s[-3,0]$

y-aksen $\quad y = t$ og $x = 0 \qquad y = ax + b$ og $x = 0 \quad a \neq 0$

13.7 a) $P(2,1)$ og $\vec{r} = [3,-2]$

$$[x,y] = [2,1] + t[3,-2].$$

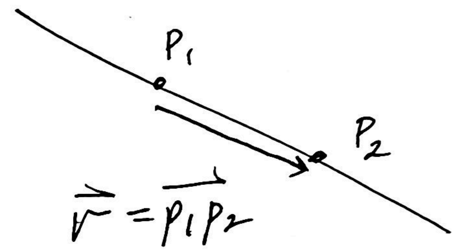
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$




b) $P_1(1,-1)$ og $P_2(2,-3)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$
$$= [2,-3] - [1,-1]$$
$$\vec{r} = [2-1, -3-(-1)] = [1,-2]$$

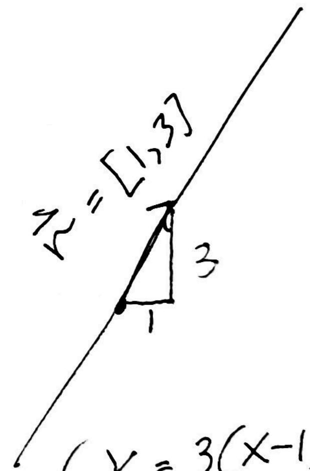
$$[x,y] = [1,-1] + t[1,2]$$




c) $P(1,-2)$ og stigningstall 3

$$\vec{r} = [1,3]$$

$$[x,y] = [1,-2] + t[1,3]$$




$$\left( \begin{aligned} y &= 3(x-1) - 2 \\ y &= 3x - 5 \end{aligned} \right)$$

d) $y = -5x + 2$

Ett punkt er $(0, 2)$ $(x=0)$

et annet er $(1, -3)$

En retningsvektor er $[1, -5]$

$$\vec{OP} = [x, y] = [0, 2] + s[1, -5]$$

$$\begin{cases} x = s \\ y = 2 + (-5s) = -5s + 2. \end{cases}$$

$y = -5x + 2$ parametrisering med parameter $x$-verdien

$$\vec{OP} = [x, -5x + 2]$$

$P(x, -5x+2)$ $x \in \mathbb{R}$.

13.8 c) Linjen går gjennom $(2,4,6)$ og origo $O(0,0,0)$.

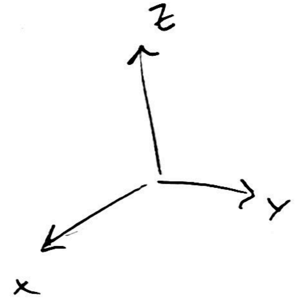
En retningsvektor er $[2,4,6] = 2[1,2,3]$

velger $\vec{r} = [1,2,3]$, og $P_0 = (0,0,0)$

Parametrisering $[x,y,z] = [0,0,0] + t[1,2,3]$

$= t[1,2,3]$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$




d) $P(2,3,4)$ $\underbrace{\text{parallell til } z\text{-aksen.}}_{\vec{r} = \vec{e_3} = [0,0,1].}$

$[x,y,z] = [2,3,4] + t\vec{r} = [2,3,4] + t[0,0,1]$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 + t. \end{cases}$$

13.9

$x = -1 + t$ og $y = 6 - 2t$

$[x, y] = [-1, 6] + t[1, -2]$.

a) Hvilke av punktene $A(3.4)$ $B(2,0)$ og $C(-6.4)$ ligger på linjen?

a) A $x = 3$
$-1 + t = 3$ så $t = 1 + 3 = 4$ da er $y = 6 - 2(4) = -2 \neq 4$

A ligger ikkje på linjen

B $x = 2 = -1 + t$ så $t = 3$ $y = 6 - 2(3) = 0$

så $B(2,0)$ ligger på linjen

C $x = -1 + t = -6$
$t = 1 + (-6) = -5$ Da er $y = 6 - 2(-5) = 16 \neq 4$

så $C(-6,4)$ ligger ikke på linjen.

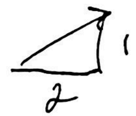
b) $y = ax + b$ $a = -2$ stigningstallet. Gjennom $(2,0)$ så $y = -2(x-2) + 0$

$y = -2x + 4$

13.10 $\quad [x,y] = [2,0] + t[2,1] \qquad t \in \mathbb{R}$

a) $\ell : \begin{cases} x = 2+2t \\ y = t \end{cases}$

b) $y = ax + b.$



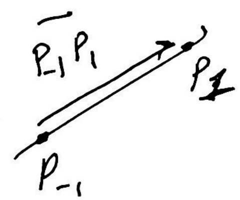

$a = \frac{1}{2}$

$ax = a(2+2t) = \frac{1}{2}(2+2t) = 1 + t = 1 + x$

$\underline{y = \frac{1}{2}x - 1}$

c) $P_{-1}(0,-1)$ og $P_1(4,1)$

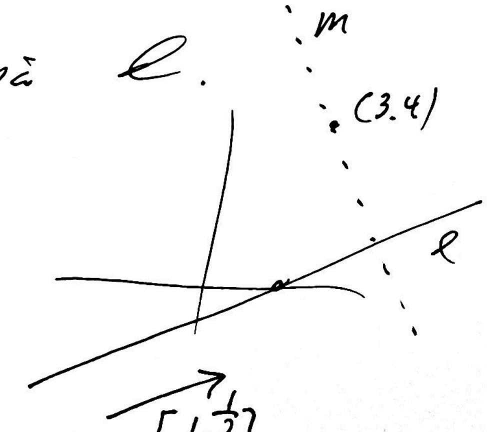
$\overrightarrow{P_{-1}P_1} = [4,1] - [0,-1]$
$= [4,2] = 2[2,1]$




Avstanden mellom $P_{-1}$ og $P_1$ er $|2[2,1]| = 2\sqrt{2^2+1^2} = \underline{2\sqrt{5}}$

d) Linjen $m$ går gjennom $(3,4)$ og står normalt på $\ell$.

Parametriser $m$.
Går gjennom $(3.4)$
Retningsvektor $[1,-2]$
$\underline{[x,y] = [3.4] + s[1,-2]}$




normal vektor til $\ell$ $\rightarrow$ $[1,-2] \cdot [1,\frac{1}{2}] = 0$