Innlevering	Fork1120 - Matematikk forkurs OsloMet
	Obligatorisk innlevering 7
Innleveringsfrist	Torsdag 13. april 2023
Antall oppgaver:	12

Løsningsforslag

Følger og rekker

Oppgave 1. Finn summen til de aritmetiske rekkene

$$a) \qquad 5 + 7 + \cdots + 37$$

LF: Vi kan benytte at summen av de første n oddetallene er lik n^2. Tallet 37 er oddetall nummer 19 (siden $2 \cdot 19 - 1 = 37$). Så summen er lik

$$19^2 - (1+3) = (20-1)^2 - 4 = 400 - 2 \cdot 20 + 1 - 4 = \underline{357}$$

$$b) \qquad 4 + 12 + 20 + \cdots + 100$$

LF: Dette er summen av $4 + 8n$ fra $n = 0$ til $n = 12$. Summen er da

$$\sum_{n=0}^{12}(4+8n) = 13 \cdot 4 + 8 \cdot \frac{13 \cdot 12}{2} = 13 \cdot (4 + 8 \cdot 6) = 13 \cdot 52 = 13 \cdot 50 + 2 \cdot 13 = 650 + 26 = \underline{676}$$

$$c) \qquad -100 - 98 - 96 - \cdots - 82$$

LF: Summen er lik

$$\sum_{i=1}^{10} -(80 + 2i) = -\left(10 \cdot 80 + 2\frac{11 \cdot 10}{2}\right) = -(800 + 110) = \underline{-910}$$

Oppgave 2. Hvor mange ledd må dere ha med i en aritmetisk rekke som starter med 1 og hvor etterfølgende ledd øker med 3 for at summen skal bli nærmest mulig 1000? Hva er summen da?

$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \cdots + (3n - 2)$$

LF: Summen med n ledd er lik

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(3i - 2) = 3\frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Når n er mye større enn 1 er dette tilnærmet lik $3n^2/2$, Vi bruker dette estimatet til å finne omtrentlige verdi for n når summen er rundt 1000. Vi løser likningen $3n^2/2 = 1000$ og får $n \approx \sqrt{2000/3} = 25.8$. Nå setter vi inn verdier rundt 25 og sjekker.

$$S_{25} = 25\frac{75 - 1}{2} = 25 \cdot 37 = 925 \qquad S_{26} = S_{25} + 3 \cdot 26 - 2 = 1001$$

Vi ser derfor at summen er nærmest 1000 når vi har <u>26 ledd og summen er da lik 1001</u>.

Oppgave 3. Finn summen til rekkene som en funksjon av n

$$a) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2n}}{3^n}$$

$$b) \qquad \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i$$

$$c) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)}$$

LF: a) Leddene er uavhenige av i, så derfor får vi at summen er lik

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2n}}{3^n} = n\frac{2^{2n}}{3^n} = n\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Dette var en litt ukonvensjonell oppgave. Her er forslag til løsning hvis dere har tolket oppgaven som følger:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2i}}{3^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(2^2)^i}{3^i} = \frac{4}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{3}\right)^i = \frac{4}{3}\cdot\frac{1-(4/3)^n}{1-4/3} = \underline{4((4/3)^n - 1)}$$

$$b) \qquad \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i$$

Sum av to etterfølgende ledd er lik

$$(-1)^i i + (-1)^{i+1}(i+1) = (-1)^i(i-(i+1)) = -(-1)^i$$

Vi får da at summen er lik:

1. $\underline{n/2 \text{ hvis } n \text{ er et partall}}$
2. $\underline{(n-1)/2 - n = -(n+1)/2 \text{ hvis } n \text{ er et odddetall}}$.

$$c) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right)$$

Dette er lik

$$\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}$$

for alle $n \geq 1$.

Oppgave 4. Vis at summen av alle tall på formen

$$2^n 3^m$$

hvor $0 \leq n \leq 11$ og $0 \leq m \leq 5$, er lik 1 490 580. (Det er $12 \cdot 6 = 72$ slike tall.)

Summen er lik

$$\Sigma_{n=0}^{11} \Sigma_{m=0}^{5} 2^n 3^m = \Sigma_{n=0}^{11} 2^n \cdot \Sigma_{m=0}^{5} 3^m =$$

$$\Sigma_{n=0}^{11} 2^n \frac{3^6 - 1}{2} = (2^{12} - 1)\frac{3^6 - 1}{2} = 1\,490\,580.$$

Oppgave 5. a) Beskriv det rasjonale tallet

$$0.123123123\ldots = 0.\underline{123}$$

som en brøk.

LF: Det er lik

$$123 \cdot 0.001001001\ldots = 123 \sum_{i=1}^{\infty} 0.001^i = 123 \cdot 0.001 \cdot \frac{1}{1 - 0.001} = \frac{123}{999} = \underline{\frac{41}{333}}$$

b) Hva må x være for at den uendelige geometrise rekken

$$x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

skal konvergere til 2?

LF: Summe til rekken konvergerer bare hvis $|x| < 1$. Summen er da lik $x^2/(1-x)$. Denne summen er lik 2 presis når $x^2/(1-x) = 2$. Dette gir annengradslikningen

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 3$$

Dette gir røttene $x = -1 \pm \sqrt{3}$. Løsningen $-1 - \sqrt{3}$ har ikke absoluttverdi under 1 så den er ikke gyldig. Vi får da løsningen $\underline{x = \sqrt{3} - 1 \approx 0.73}$.

c) Vi setter inn 1000 kr hvert år fra 1.1.2022 til og med 1.1.2030. Hvor mye penger har vi på kontoen ved utgangen av 2040 hvis årlig rente i hele perioden er 10%?

LF: Vi setter inn penger 9 ganger. Pengemengden 1.1.2030 er da lik

$$\sum_{i=0}^{8} 1000(1+0.1)^i = 1000\frac{1.1^9 - 1}{0.1} = 10000(1.1^9 - 1)$$

Deretter står pengene i banken i 10 år. Pengemengden ved *utgangen* av 2040 er da lik

$$\underline{10000(1.1^9 - 1)(1.1)^{10} = 35222 \text{ kroner}}$$

d) Finn summen av inversen til alle naturlige tallene som bare er delelige med primtallene 2, 3 og 5. Det vil si finn summen av alle tall på formen

$$\frac{1}{2^k 3^l 5^m}$$

for $k, l, m \geq 0$. Ordnet etter avtagende størrelse ser rekken ut som

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \cdots$$

LF: Dette er produktet av de tre uendelige geometriske rekkene

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i\right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i\right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^i\right) =$$

$$\frac{1}{1-1/2} \cdot \frac{1}{1-1/3} \cdot \frac{1}{1-1/5} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \underline{\frac{15}{4} = 3.75}$$

Oppgave 6. Finn konvergensområde til de to potensrekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{(2n+1)}}{2^{n+3}}$$

Den første rekken har konvergensradius 1. Dette ser vi ved å sammenligne med den geomtriske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Rekken konvergerer for $x = 1$ og for $x = -1$, så konvergensområdet er lik $[-1, 1]$. Dette vet vi fordi vi har tidligere sett at rekken når $x = 1$ konvergerer til et tall mellom 1 og 2. (Dette tallet viser seg å være $\pi^2/6$.) Tilsvarende for $x = -1$.

Den andre rekken er lik

$$\frac{3x}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{2^n} = \frac{3x}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(3x)}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$

Vi sammenligner med den geometrise rekken og ser at denne rekken konvergerer når $|3x/\sqrt{2}| < 1$. Rekken konvergerer derfor for $\underline{|x| < \sqrt{2}/3}$.

Oppgave 7. a) Finn summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000.

b) Finn summen av alle positive partall (dvs. tall som er delelige med 2) mindre enn eller lik 1000.

c) Finn summen av alle naturlige tall som er delelige med 5 og mindre enn eller lik 1000.

d) Finn summen av alle naturlige tall som er delelige med 2 eller 5 (eller begge) og mindre enn eller lik 1000.

LF:

a)

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = \underline{500500}.$$

b) Finn summen av alle positive partall (dvs. tall som er delelige med 2) mindre enn eller lik 1000. Positive partallene mindre enn 1000 er følgen $a_n = 2n$ for n mellom 1 og 500. Summen av partala er lik

$$2(1 + 2 + 3 + \cdots + 500) = 2\frac{500 \cdot 501}{2} = \underline{250500}.$$

c) Finn summen av alle naturlige tall som er delelige med 5 og mindre enn eller lik 1000.

Dette er summen av tall $a_n = 5n$ for n mellom 1 og 200. Summen er lik

$$5(1+2+3+\cdots+200) = 5\frac{200\cdot 201}{2} = 100\cdot 1005 = \underline{100500}.$$

d) Finn summen av alle naturlige tall som er delelige med 2 eller 5 (eller begge) og mindre enn eller lik 1000.

Dette er summen av alle tall mindre enn eller lik 1000 som er positve partall og alle naturlige tall delelige med 5 hvor vi trekker fra alle tall delelige med 10 (siden de blir telt opp dobbelt). Tall som er delelig med både 2 og 5 er tall som er delelige med $2 \cdot 5 = 10$. Summen av disse tallene opp til og med 1000 er $10(1+2+3+\cdots+100) = 50500$. Summen blir derfor $250500 + 100500 - 50500 = \underline{300500}$.

Oppgave 8. a) Finn summen til den uendelige geometriske rekken (hvis den eksisterer)

$$6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + - \cdots$$

LF: Ledd i er $(-1)^n \cdot 6/3^i$ og summen er over alle $i \geq 0$. Rekken konvergerer derfor og summen er lik

$$6 \cdot \frac{1}{1+1/3} = 6/(4/3) = \underline{9/2 = 4.5}$$

b) Finn summen av dei første 100 tallene som ikkje er delelige med 3.

LF: Vi skal finne summen av dei første 100 tallene som ikke er delelige på tre. Eg går utifra at det menes naturlige tall. (0 er delelig med 3 så det blir ikkje et spørsmål om vi skal starte med 0 eller 1...) Tallene er $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, ...$

Vi velger å ta summen ved å summere tall på formen $1 + 3n$ og $2 + 3n$ fra $n = 0$. Dei 100 første tall på denne form får vi ved å ta summe fra $n = 0$ til og med $n = 49$. Alternativt kunne vi ha tatt summen over n fra 1 til 150 og så trekt fra summen av $3n$ fra 1 til 50.

$$\sum_{n=0}^{49}(1+3n) + \sum_{n=0}^{49}(2+3n) =$$

$$\sum_{n=0}^{49}(1+2) + \sum_{n=0}^{49}(3n+3n) = 50\cdot 3 + 6 \cdot \frac{50\cdot 49}{2} =$$

$$3(50 + 50\cdot 49) = 3\cdot 50^2 = 3 \cdot 2500 = \underline{7500}$$

c) Vi ser på to rekker hvor vi stokker om på rekkefølgen til leddene. Her er den første rekken

$$1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

Rekken består av bolker av n kopier av $1/n$ etterfulgt av n kopier av $-1/n$ for $n=1,2,3,4,\ldots$.

Vi stokker om på rekkefølgen til tallene i rekken slik at i hver bolk av $1/n$ og $-1/n$ så kommer disse to tallene annenhver gang

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots$$

Avgjør om hver av rekkene konvergerer. Hvis de konvergerer finn også summen til rekken.

LF: Den første rekken divergerer. Vi kan finne delsummer med vilkårlig mange ledd som har både verdien 1 og verdien 0. Rekken kan derfor ikkje konvergere (delsummene må da etter hvert nærme seg ett tall).

Den andre rekken konvergerer. Hvis vi har tatt en delsum helt ut til ledd av typen $1/n$ så vil delsummene svinge mellom $1/n$, eller en mindre positiv verdi, og 0. Derfor vil delsummene etter hvert nærme seg 0 og rekken konvergerer mot 0.

Vi ser av dette at rekkefølgen på leddene i en rekke er avgjørende for om rekken konvergerer og hva den konvergerer til. Ved å stokke litt mer om på rekkefølgen av leddene kan dere faktisk lage rekker som vil konvergerer mot et hvilket som helst tall.

d) Vis at hvis en rekke $x_1+x_2+x_3+\cdots$ konvergerer da må leddene x_n i rekken gå mot null når n går mot uendelig. Gi eksempel på at det er nødvendig krav for at en rekke skal konvergere, men ikkje tilstrekkelig. Med andre ord gi et eksempel på en rekke hvor leddene går mot null, men hvor rekken ikkje konvergerer.

LF: Vi har i del c sett det finnes rekker hvor ledd n går mot null selv om rekken ikkje konvergerer. Et annet eksempel er den harmoniske rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

som divergerer selv om leddene går mot null.

La oss anta at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergerer. Det vil si at følgen av delsummer

$$S_N=\sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

konvergerer til en sum S. spesielt vil da $S_{N+1}-S_N=x_N$ konvergere mot 0 når n går mot uendelig. Dette viser at hvis en rekke konvergerer da må leddene x_n gå mot null når n går mot uendelig.

e) Bestem for hvilke x den geometriske rekken

$$\cos(x)/2 + \cos^2(x) + 2\cos^3(x) + \cdots$$

konvergerer. Finn summen til rekken når den konvergerer.

LF: Kvotienten i den geometriske rekken er $2\cos(x)$. Så den geometriske rekken konvergerer presis når $|\cos(x)| < 1/2$.

Vi bestemmer x slik at dette er oppfylt for x i et omløp fra 0 til 2π. Vi ser av enhetssirkelen og den kjente verdien til $\arccos(1/2) = \pi/3$ at løsningene er

$$\underline{x \in \langle \pi/3, 2\pi/3\rangle \cup \langle 4\pi/3, 5\pi/3\rangle}$$

Hvis vi ønsker alle verdier av x legger forskyver vi intervallene ovenfor med heltallsmultipler av perioden til cos som er 2π.

Når rekken konvergerer er summen lik

$$\frac{\cos(x)}{2} \cdot \frac{1}{1 - 2\cos(x)} = \underline{\frac{\cos(x)}{2(1 - 2\cos(x))}}$$

Integrasjon

Oppgave 9. Finn de ubestemte integralene.

$$a) \int 3\sqrt{4x+5}\,dx \qquad b) \int 3x\sqrt{4x+5}\,dx \qquad c) \int \frac{2x}{3+x^2}\,dx$$

LF: Vi benytter substitusjon med $u = 4x + 5$ og får

$$a) \int 3\sqrt{4x+5}\,dx = 3\int \sqrt{u}\,\frac{1}{4}du = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \underline{\frac{1}{2}(4x+5)^{3/2} + C}$$

Vi benytter samme substitusjon som i a) og benytter at $x = (u-5)/4$.

$$b) \int 3x\sqrt{4x+5}\,dx = 3\int \frac{u-5}{4}\sqrt{u}\,\frac{1}{4}du = \frac{3}{4^2}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - 5\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C =$$

$$\underline{\frac{3}{40}(4x+5)^{5/2} - \frac{5}{8}(4x+5)^{3/2} + C}$$

Vi benytter substitusjonen $u = x^2 + 3$. Da er $du = 2xdx$.

$$c) \int \frac{2x}{3+x^2}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \underline{\ln|x^2+3| + C}$$

Oppgave 10. Vis at hvis $f(x)$ er en odde funksjon, $f(-x) = -f(x)$, da er

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

for alle a slik at $f(x)$ er definert i intervallet $[-a, a]$.

LF: Funksjonen er odde så det er like store areal over x-aksen som under x-aksen for en symmetrisk intervall $[-a, a]$. De kanselerer hverandre så integralet er lik 0. Her er et mer formelt bevis hvor vi splitter opp integralet i to integraler over $[-a, 0]$ og $[0, a]$ og benytter substitusjonen $u = -x$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-x)\,(-1)dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} (-f(x))\,(-1)dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Oppgave 11. Finn de bestemte integralene

$$a)\ \int_{0}^{1/2} e^{-2x+1}\,dx \qquad b)\ \int_{-2}^{2} \sin^{1/3}(x)\,dx \qquad c)\ \int_{0}^{3} (1 + x^2/3)^2\,dx$$

LF: Vi benytter substitusjonen $u = -2x + 1$. Vi har $du = -2dx$, $u(0) = 1$ og $u(1/2) = 0$. Vi får da

$$a)\ \int_{0}^{1/2} e^{-2x+1}\,dx = \int_{1}^{0} e^{u}\,\frac{1}{-2}du = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{u}\,du = \frac{e^{u}}{2}\Big|_{0}^{1} = \underline{\frac{e-1}{2}}$$

Integralet i b) er lik 0 siden integranden $\sin^{1/3}$ er en odde funksjon og vi integrerer over intervallet $[-2, 2]$.

Vi ganger ut parentesen og finner en antideriverte.

$$c)\ \int_{0}^{3} (1+x^2/3)^2\,dx = \int_{0}^{3} 1+2x^2/3+x^4/9\,dx = \left(x + \frac{2x^3}{9} + \frac{x^5}{45}\right)+C\Big|_{0}^{3} = 3+6+\frac{27}{5} = \underline{\frac{72}{5}}$$

Oppgave 12. a) Vis at for alle $n \geq 1$ så er

$$\int_{-1}^{0} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})\,dx = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

b)* Vis at den uendelige rekken

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

konvergerer til $\ln(2) \cong 0.693147180\ldots$.

LF: Integrasjon er lineær så

$$\int_{-1}^{0} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{0} x^{i-1}\, dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i}\Big|_{-1}^{0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

Vi kaller denne delsummen S_n.

Siden

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

så er

$$S_n = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x}\, dx - \int_{-1}^{0} \frac{x^n}{1-x}\, dx$$

Det første av de to integralene er lik

$$-\ln|1-x|\Big|_{-1}^{0} = \ln(2)$$

I intervallet $[-1, 0]$ er $x^n/(1-x)$ større enn eller lik 0 når n er jevn og mindre enn eller lik 0 når n er odde. Siden $1/2 \leq 1/(1-x) \leq 1$ og

$$\int_{-1}^{0} x^n\, dx = (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

så følger det at

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq (-1)^n(\ln(2) - S_n) \leq \frac{1}{n+1}$$

Derfor er grensen

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \ln(2)$$