| | |
|---|---|
| Innlevering | Fork1120 - Matematikk forkurs OsloMet |
| | Obligatorisk innlevering 7 |
| Innleveringsfrist | Torsdag 13. april 2023 |
| Antall oppgaver: | 12 |

# Følger og rekker

**Oppgave 1.** Finn summen til de aritmetiske rekkene

$$a) \qquad 5 + 7 + \cdots + 37$$

$$b) \qquad 4 + 12 + 20 + \cdots + 100$$

$$c) \qquad -100 - 98 - 96 - \cdots - 82$$

**Oppgave 2.** Hvor mange ledd må dere ha med i den aritmetisk rekken

$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \cdots + (3n - 2)$$

som starter med 1 og hvor etterfølgende ledd øker med 3, for at summen skal bli nærmest mulig 1000? Hva er summen da? Hvor mange ledd må dere da ta med?

**Oppgave 3.** Finn summen til rekkene som en funksjon av $n$

$$a) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2n}}{3^n}$$

$$b) \qquad \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i$$

$$c) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)}$$

**Oppgave 4.** Vis at summen av alle tall på formen

$$2^n 3^m$$

hvor $0 \leq n \leq 11$ og $0 \leq m \leq 5$, er lik $1\,490\,580$. (Det er $12 \cdot 6 = 72$ slike tall.)

**Oppgave 5.** a) Beskriv det rasjonale tallet

$$0.1231231213\ldots = 0.\underline{123}$$

som en brøk.

b) Hva må $x$ være for at den uendelige geometrise rekken

$$x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

skal konvergere til 2?

c) Vi setter inn 1000 kr hvert år fra 1.1.2022 til og med 1.1.2030. Hvor mye penger har vi på kontoen ved utgangen av 2040 hvis årlig rente i hele perioden er 10%?

d) Finn summen av inversen til alle de naturlige tallene som bare er delelige med primtallene 2, 3 og 5. Det vil si finn summen av alle tall på formen

$$\frac{1}{2^k 3^l 5^m}$$

for $k, l, m \geq 0$. Ordnet etter avtagende størrelse ser rekken ut som

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \cdots$$

**Oppgave 6.** a) Finn summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000.

b) Finn summen av alle positive partall (dvs. tall som er delelige med 2) mindre enn eller lik 1000.

c) Finn summen av alle naturlige tall som er delelige med 5 og mindre enn eller lik 1000.

d)* Finn summen av alle naturlige tall som er delelige med 2 eller 5 (eller begge) og mindre enn eller lik 1000.

**Oppgave 7.** a) Finn summen til den uendelige geometriske rekken (hvis summen eksisterer)

$$6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + - \cdots$$

b)* Finn summen av dei første 100 naturlige tallene som ikkje er delelige med 3.

c)* Vi ser på to rekker hvor vi stokker om på rekkefølgen til leddene. Her er den første rekken

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Rekken består av bolker av $n$ kopier av $1/n$ etterfulgt av $n$ kopier av $-1/n$ for $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Vi stokker om på rekkefølgen til tallene i rekken slik at i hver bolk av $1/n$ og $-1/n$ så kommer disse to tallene annenhver gang

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$$

Avgjør om hver av rekkene konvergerer. Hvis de konvergerer finn også summen deres.

d) Vis at hvis en rekke $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$ konvergerer da må leddene $x_n$ i rekken gå mot null når $n$ går mot uendelig. Gi eksempel på at det ikkje er et tilstrekkelig krav for at rekken skal konvergere. Med andre ord gi et eksempel på en rekke hvor leddene går mot null, men hvor rekken ikkje konvergerer.

e) Bestem for hvilke $x$ den geometriske rekken

$$\cos(x)/2 + \cos^2(x) + 2\cos^3(x) + \cdots$$

konvergerer. Finn summen til rekken når den konvergerer.

**Oppgave 8.** Finn konvergensområde til de to potensrekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{(2n+1)}}{2^{n+3}}$$

# Integrasjon

**Oppgave 9.** Finn de ubestemte integralene.

$$a)\ \int 3\sqrt{4x+5}\,dx \qquad b)\ \int 3x\sqrt{4x+5}\,dx \qquad c)\ \int \frac{2x}{3+x^2}\,dx$$

**Oppgave 10.** Vis at hvis $f(x)$ er en odde funksjon, $f(-x) = -f(x)$, da er

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

for alle $a$ slik at $f(x)$ er definert i intervallet $[-a, a]$.

**Oppgave 11.** Finn de bestemte integralene

$$a)\ \int_0^{1/2} e^{-2x+1}\,dx \qquad b)\ \int_{-2}^{2} \sin^{1/3}(x)\,dx \qquad c)\ \int_0^3 (1 + x^2/3)^2\,dx$$

**Oppgave 12.** a) Vis at for alle $n \geq 1$ så er

$$\int_{-1}^{0} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})\,dx = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

b)* Vis at den uendelige rekken

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

konvergerer til $\ln(2) \cong 0.693147180\ldots$.