Innlevering i	FORK1120 - Matematikk forkurs OsloMet
	Obligatorisk innlevering 5
Innleveringsfrist	Torsdag 9. februar 2023
Antall oppgaver:	9 enkle + 6 middels + 3 vanskelige

Løsningsforslag

1 Enkle oppgaver

Oppgave 1. Finn volum og overflateareal til følgende figurer. Tegn gjerne figurene.

a) Et rett rektangulert prisme med sideflater av lengde 2, 3, og 5.

LF: Volumet er $V = 2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{30}$. Overflaten består av seks flater. Arealet er

$$2(2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5) = \underline{62}.$$

b) En rett sylinder med radius 3 og høyde 7. (Topp og bunnplaten tas med når dere finner overflatearealet).

Volumet er grunnflate ganget med høyden. Det er $\pi \cdot 3^2 \cdot 7 = \underline{63\pi}$. Overflatearealet er

$$2\pi \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot (\pi \cdot 3^2) = 2 \cdot 3(7+3)\pi = \underline{60\pi}.$$

c) Ein kjegle med radius 3 og høyde 7. (Bunnplaten tas med.)

Volumet er en tredel av volumet til tilsvarende sylinder. Fra b) er derfor volumet $63\pi/3 = \underline{21\pi}$.

Bunnflaten har areal $\pi 3^2$. Kjeglen har det samme arealet som et sirkelsegment med radius $\sqrt{3^2+7^2}$ og buelengde lik $2\pi \cdot 3$. Sirkelsegmentet har areal halvparten av $\sqrt{3^2+7^2}$ ganget med buelengden. Dette er $\sqrt{58}2\pi \cdot 3/2 = 3\sqrt{58}\pi$. Totalt areal er derfor $\underline{(9+3\sqrt{58})\pi}$

d) En kule med radius 5. Volumet er $4\pi 5^3/3 = \underline{500\pi/3}$. Overflatearealet er

$$4\pi 5^2 = \underline{100\pi}.$$

e) En halvkule (hvor snittflaten tas med) som har diameter 3.

Radien er halvparten av diameteren. Volumet er halvparten av volumet til den tilsvarende kulen. Volumet er derfor lik

$$4\pi(3/2)^3/3 \cdot 2 = \underline{9\pi/4}.$$

Overflatearealet er

$$4\pi(3/2)^2/2 + \pi(3/2)^2 = \underline{27\pi/4}.$$

Oppgave 2. Finn vinklene og lengden til sidene, samt arealet til trekanten $\triangle ABC$ gitt som følger. Svaret kan gis som desimaltall med minst 4 siffers nøyaktighet. Tallene som er oppgitt er eksakte.

a) $\angle A = 90°$, $\angle C = 30°$ og $AB = 8$.

LF: Dette er en rettvinkla trekant. Siden summen av vinklene i en trekant er 180° så er $\underline{\angle B = 60°}$. Hypotenusen BC har lengde

$$\underline{BC = 8/\sin(30°) = 8/(1/2) = 16.00}.$$

Kateten AC har lengde $\underline{AC = 8/\tan(30°) = 8/(1/\sqrt{3}) = 8\sqrt{3} \approx 13.856}$. Arealet til trekanten er $AC \cdot AB/2$ (siden $\sin(\angle A) = 1$). Arealet er

$$(8\sqrt{3}) \cdot 8/2 = 32\sqrt{3} \approx \underline{55.425}.$$

b) $\angle A = 90°$, $\angle C = 33°$ og $AB = 8$. Denne oppgaven er svært lik deloppgave a). Vinkel C er øka fra 30 til 33 grader. Vi forventer derfor at AC og BC er litt kortere her. Vinkel B er lik $\underline{\angle B = 57°}$. Hypotenusen BC har lengde

$$\underline{BC = 8/\sin(33°) \approx 14.689}$$

Kateten AC har lengde $\underline{AC = 8/\tan(33°) \approx 12.319}$. Arealet til trekanten er

$$AC \cdot AB/2 = 12.319 \cdot 8/2 \approx \underline{49.276}.$$

c) $\angle C = 20°$ og $AC = BC = 10$.

LF: Dette er ein likebeina trekant med to sider av lengde 10 og vinkel 20° mellom de to like sidene. Vinkel A og B må da være like store. Siden summen av vinklene i en trekant er 180° er $\underline{\angle A = \angle B = 80°}$. Lengden på siden $\underline{AB}$ er lik $2AC\cos(80°) = 20\cos(80°) \approx \underline{3.473}$. Arealet til trekanten er lik $AB \cdot AC \cdot \sin(80°)/2 \approx \underline{17.10}$.

d) $\angle A = 55°$, $\angle B = 44°$ og $AC = 23$.

LF: Siden summen av vinklene i en trekant er 180° så er $\underline{\angle C = (180 - 44 - 55)° = 81°}$. Her er det naturlig å anvende sinussetningen siden vi kjenner både vinkel B og lengden til side $b = AC$. Sinussetningen sier at følgende forhold er like

$$\frac{\sin \angle B}{b} = \frac{\sin \angle A}{a} = \frac{\sin \angle C}{c}.$$

Forholdet er lik $\sin(44°)/23 = 0.0302025\ldots$.

Lengden til siden $\underline{AB \text{ er } \sin(81°)/0.0302025 \approx 32.70}$ og

lengden til siden $\underline{BC \text{ er } \sin(55°)/0.0302025 \approx 27.12}$.

Arealet til trekanten er lik $AB \cdot AC \cdot \sin(55°)/2 \approx \underline{308.1}$.

e) $\angle A = 40°$, $AC = 8$ og $BC = 7$.

LF: Det er to forskjellige trekanter med disse egenskapene. Vi bruker sinussettningen og får :

$$\frac{\sin\angle C}{c} = \frac{\sin\angle B}{b} = \frac{\sin\angle A}{a} = \frac{\sin(40°)}{7} \approx 0.0918268\ldots.$$

Det følger at $\sin\angle B = AC \cdot 0.0918268\ldots = 0.734614\ldots$. Dette gir to mulige løsninger for $\angle B$,

$$\angle B_1 = \arcsin(0.734614) = 47.27° \quad \text{og} \quad \angle B_2 = 180° - \angle B_1 = 132.7°.$$

Tilsvarende verdier for vinkel C er $\angle C_1 = 92.73°$ og $\angle C_2 = 7.275°$. Lengden til siden AB, eller c, er lik $\sin(\angle C)\sin(\angle A)/a$. I de to tillfellene får vi $\underline{AB_1 = 10.88 \text{ og } AB_2 = 1.37}$.

Arealet til trekanten er lik $AC \cdot AB \cdot \sin(\angle C)/2$. I tilfelle 1 er arealet til trekanten lik $8 \cdot 7\sin(92.725°) \approx \underline{27.97}$ og i tilfelle 2 er arealet til trekanten lik $8 \cdot 7\sin(7.2746°)/2 \approx \underline{3.545}$.

f) $\angle A = 120°$, $AB = 12$ og $AC = 7$.

Her er det naturlig å bruke cosinussettningen siden vi kjenner vinkelen mellom de to kjente sidene. Cosinussettningen gir at

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(120°) = 7^2 + 12^2 - 2 \cdot 7 \cdot 12(-1/2) = 49 + 144 + 84 = 277.$$

Siden $a > 0$ så er $\underline{BC = a = \sqrt{277} \approx 16.64}$. Fra sinussettningen er

$$\sin(\angle C) = AB \cdot \sin(\angle A)/BC = 12(\sqrt{3}/2)/16.6433 = 0.62441\ldots\ .$$

Siden $\angle A = 120°$ så er summen av vinkel B og vinkel C lik $70°$. Derfor er $\underline{\angle C = 38.64°}$ og $\underline{\angle B = 21.36°}$. Arealet til trekanten er lik

$$7 \cdot 12 \cdot \sin(120°)/2 = \underline{36.37}.$$

Oppgave 3. Gjør om følgende vinkler oppgitt i grader til radianer. Gi svaret eksakt.

$$a)\ 270° \quad b)\ 150° \quad c)\ 25° \quad d)\ 18° \quad e)\ 135°.$$

LF:

$$a)\ 270° = \frac{3\pi}{2} \quad b)\ 150° = \frac{5\pi}{6} \quad c)\ 25° = \frac{5\pi}{36} \quad d)\ 18° = \frac{\pi}{10} \quad e)\ 135° = \frac{3\pi}{4}.$$

Oppgave 4. Gjør om følgende vinkler oppgitt i radianer til grader. Gi svaret som desimaltall og avrundt til 5 gyldige siffer.

$$a)\ \pi/3 \quad b)\ 1 \quad c)\ \frac{1}{57} \quad d)\ \frac{22}{7} \quad e)\ \frac{5\pi}{4}.$$

LF:

$$a)\ \pi/3 = 60.000° \quad b)\ 1 = \frac{180°}{\pi} = 57.296° \quad c)\ \frac{1}{57} = 1.0052°$$

$$d)\ \frac{22}{7} = 180.07° \quad e)\ \frac{5\pi}{4} = 225.00°.$$

Oppgave 5. Finn alle vinkler v, med enhet radianer, i intervallet $[0, 2\pi]$ slik at hver av likningene er oppfylt. Svarene skal gis eksakt.

a) $\sin(v) = -\frac{1}{2}$

LF: Løsningene er $\underline{v = \frac{7\pi}{6} \text{ eller } v = \frac{11\pi}{6}}$.

b) $\cos(v) = 1$

LF: Løsningene er $\underline{v = 0 \text{ eller } v = 2\pi}$.

c) $\cos(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

LF: Løsningene er $\underline{v = \frac{5\pi}{6} \text{ eller } v = \frac{7\pi}{6}}$.

d) $\sin(v) - \sqrt{3}\cos(v) = 0$

LF: Det er ingen løsning når $\cos v = 0$ (siden da er $\sin v = \pm 1$). Likningen er derfor ekvivalent til likningen $\tan(v) = \sqrt{3}$. Løsningene er $\underline{v = \frac{\pi}{3} \text{ og } v = \frac{4\pi}{3}}$.

e) $\sin(v)\cos(v) = 0$

LF: Likningen er ekvivalent til $\sin(v) = 0$ eller $\cos(v) = 0$. Løsningsmengden er

$$\underline{\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}}.$$

Oppgave 6. Finn alle vinkler v, med enhet grader, i intervallet $[0, 360°]$ slik at hver av likningene er oppfylt. Svarene skal gis med fem gyldige siffer.

LF: Vi avrunder løsningene til 5 gyldige siffer.

a) $\sin(v) = \frac{1}{3}$

LF: Løsningene er $\underline{v = 19.471° \text{ eller } v = 160.53°}$.

b) $\cos(v) = 0.8$

LF: Løsningene er $\underline{v = 36.870° \text{ eller } v = 323.13°}$.

c) $\sin(v) = 2$

LF: Likningen har ingen relle løsninger.

d) $\tan(v) = 1000$

LF: Løsningene er $\underline{v = 89.943 \text{ eller } v = 269.94°}$.

e) $\sin(v) = \frac{\pi}{180}$

LF: Løsningene er $\underline{1.0001° \ (\arcsin(\tfrac{\pi}{180}) = 1.0000507765\ldots) \text{ eller } 179.00°}$.

Oppgave 7. Skriv følgende funksjoner som en harmonisk svingning på standard form

$$A\sin(kx + c) + d$$

hvor $A, k \geq 0$. Finn også perioden til svingningene. Det kan være til hjelp å se på grafen til funksjonene (geogebra).

Konstanten c er ikke unik. Den kan forskyves med heltallsmultiplum av 2π. Velg gjerne c i intervallet $[0, 2\pi]$.

a) $f(x) = \sin(2\pi x + 4\pi) = 1 \cdot \sin(2\pi x) + 0$. Vi har her benyttet oss av at sin er periodisk med periode 2π. Vi har da at $f(x) = \underline{1 \cdot \sin(2\pi x) + 0}$.

b) $f(x) = \sin(-2x + 20) = \underline{\sin(2x + \pi - 20)}$. Så $A = 1$, $k = 2$, $d = 0$ og $c = 7\pi - 20 \cong 1.99114857513$.

c) $f(x) = \cos(2x) = \cos(-2x) = \sin(\pi/2 - (-2x)) = \underline{1 \sin(2x + \pi/2) + 0}$

d) $f(x) = \cos^2(3x) - 1/2 = (1/2)\cos(6x) = \underline{(1/2)\sin(6x + \pi/2) + 0}$.

Her har vi benyttet formel for dobling av vinkelen for cosinus $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$. Sammen med Pytagoras sin sats gir dette $\cos^2(x) = (1 + \cos(2x))/2$.

Oppgave 8. Deriver funksjonene

a) $f(x) = \sin(2\pi x + 3)$

b) $f(x) = 3x \sin(2x) + 7$

c) $f(x) = e^{-3x+1} \cos(5x)$

d) $f(x) = \cos^3(x)$

LF:

a) $\underline{f'(x) = 2\pi \cos(2\pi x + 3)}$

b) $f'(x) = 3\sin(2x) + 3x(2\cos(2x)) + 0$ ved bruk av produktregelen. Dette er lik $\underline{f'(x) = 3(\sin(2x) + 2x\cos(2x))}$.

c) Produktregelen gir $f'(x) = (-3x)'e^{-3x+1}\cos(5x) - (5x)'e^{-3x+1}\sin(5x)$. Derfor er $\underline{f'(x) = -e^{-3x+1}(5\sin(5x) + 3\cos(5x)}$.

d) $f'(x) = 3\cos^2(x)(\cos(x))' = \underline{-3\sin(x)\cos^2(x)}$.

Oppgave 9. Finn vektoren $\overrightarrow{AB}$ når punktene er gitt som følger.

a) $A = (1, 4)$ og $B = (6, 7)$

LF: Vi har at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Vektoren $\overrightarrow{OB}$ har koordinater gitt ved punktkoordinatene til B etc. $\overrightarrow{AB} = [6, 7] - [1, 4] = \underline{[5, 3]}$

b) $A = (0, 0, 0)$ og $B = (6, 7, 13)$

LF: Punktet A er origo. Derfor er

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \underline{[6, 7, 13]}.$$

c) $A = (4, 0, -14)$ og $B = (0, 0, 0)$

LF: Punktet B er origo. Derfor er

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = -[4, 0, -14] = \underline{[-4, 0, 14]}.$$

d) $A = (1.34, 6.87, 9.678)$ og $B = (6.789, 7.77, 13.654)$

LF:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [6.789, 7.77, 13.654] - [1.34, 6.87, 9.678] = \underline{[5.449, 0.9, 3.976]}.$$

e) $A = (1/4, 5/6, 7/13)$ og $B = (3/6, 5/24, 8/7)$

LF:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [3/6, 5/24, 8/7] - [1/4, 5/6, 7/13] =$$

$$[3/6 - 1/4, 5/24 - 5/6, 8/7 - 7/13] = \underline{[1/4, -5/8, 55/91]}.$$

2 Middels vanskelige oppgaver

Oppgave 10. Finn alle vinkler v, med enhet grader, i intervallet $[0, 360°]$ slik at hver av likningene er oppfylt. Svarene skal gis eksakt.

a) $\sin^2(v) = \frac{1}{2}$

LF: Likningen er ekvivalent til $\sin(v) = 1/\sqrt{2}$ eller $\sin(v) = -1/\sqrt{2}$. I intervallet er løsningene gitt ved $\underline{v = 45, 135, 225 \text{ og } 315 \text{ grader}}$.

b) $2\sin(v) + 5 = 9 - \sin(v)$

LF: Dette er en lineær likning i $\sin(v)$. Vi løser likningen of får $\sin(v) = 4/3$. Denne likningen har <u>ingen løsning</u> siden $\sin(v) \leq 1$ for alle v.

c) $\cos^2(v) - \cos(v) = 0$ Vi faktoriserer uttrykket og får $\cos(v)(\cos(v) - 1) = 0$. Et produkt er lik null hvis og bare hvis minst en av faktorene er null. Derfor er løsningen alle v slik at $\cos(v) = 0$ eller $\cos(v) = 1$. Løsningen er derfor $\underline{v = 0, 90, 270 \text{ og } 360 \text{ grader}}$.

d) $\sin^2(v) + \cos(v) - 1 = 0$

LF: Siden $\sin^2(v) = 1 - \cos^2(v)$ for alle v så er liknigen ekvivalent til $-\cos^2(v) + \cos(v) = 0$. Dette er igjen ekvivalent til likningen i deloppgave c), og derfor er <u>løsningsmengden som i c)</u>.

e) $2\sin(v) - \tan(v) = 0$

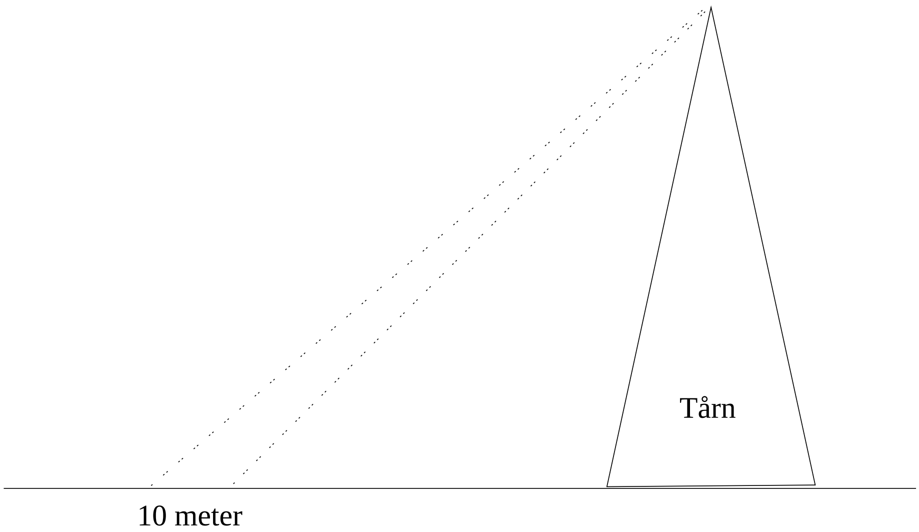
LF: Her må vinkelen v være slik $\cos(v) \neq 0$ siden $\tan(v)$ er bare definert da. Vi faktoriserer uttrykket og får $\sin(v)(2 - 1/\cos(v)) = 0$. Produktet er null hvis og bare hvis $\sin(v) = 0$ eller $\cos(v) = 1/2$. Løsningen er derfor

$\underline{v = 0, 60, 180, 300 \text{ og } 360 \text{ grader}}$.

Oppgave 11. Et tårn står på en flat bakke. Vi har et instrument som kan måler vinkler (mellom laserstråler) nøyaktig og et kort målband. Vi måler først vinklen mellom linjen fra bakken der vi står og toppen av tårnet og bakkenivået. Den er 45.0 grader. Deretter går vi 10 meter i retning vekk fra tårnet. Vi måler vinkelen igjen og finner at den nå er 41.3 grader. Hvor høyt er tårnet?

LF: La h være høyden til tårnet. La b være den horisontale avstanden fra første målepunt til foten av tårnet (rett under tårnes topp). Da er $y = h/\tan(45°) = h$. Videre er $y + 10m = h/\tan(41.3°)$. Dette gir at $h(1/\tan(41.3°) - 1) = 10m$.

Derfor er høyden lik $h = 10m/(1/\tan(41.3°) - 1) = \underline{72m}$.



Oppgave 12. Deriver de følgende funksjonene.

a) $f(x) = 3\cos(2x - 1) + 12$

b) $f(x) = x^2 \sin(x)$

c) $f(x) = \cos(\sin(x))$

d) $f(x) = \cos(2x)\sin(3x)$

De deriverte er lik

a)

$$f'(x) = 3(\cos(2x-1))' + 0 = \underline{-6\sin(2x-1)}$$

b)

$$f'(x) = (x^2)'\sin(x) + x^2(\sin(x))' = \underline{2x\sin(x) + x^2\cos(x)}$$

c)

$$f'(x) = -\sin(\sin(x)) \cdot (\sin(x))' = -\cos(x)(\sin(\sin(x)))$$

d)

$$f'(x) = (\cos(2x))'\sin(3x) + \cos(2x)(\sin(3x))' = \underline{3\cos(2x)\cos(3x) - 2\sin(2x)\sin(3x)}$$

Oppgave 13. Løs følgende likninger. Gi svarene med 4 gyldige siffer.

a) $\arcsin x = 0.3786$. Likningen sier bare at 0.3786 er vinkelen mellom $-\pi$ og π slik at sinus til denne vinkelen er lik x. Løsningen er $x = \sin(0.3786) = \underline{0.3696}$.

b) $\tan(2\pi x) = 1$ hvor $x \in [-2, 2]$.

La vinkelen være $v = 2\pi x$. Variabelen x er lik $v/(2\pi)$. Da er v mellom -4π og 4π. Løsningene til $\tan(v) = 1$ er $v = \pi/4 + n\pi$ for heltall n. I det gitte intervallet kan n være mellom -4 og 3. Løsningsmengden er derfor

$$\{\underline{1/8-2,\ 1/8-3/2,\ 1/8-1,\ 1/8-1/2,\ 1/8,\ 1/8+1/2,\ 1/8+1,\ 1/8+3/2}\}.$$

Som desimaltall er dette nøyaktig lik

$$\{-1.875,\ -1.375,\ -0.875, -0.375,\ 0.125,\ 0.625,\ 1.125, 1.625\}$$

c) $\cos(2x-1) = 0.3479$ hvor $x \in [0, 3]$.

Vinkelen er $v = 2x-1$. Da er variabelen $x = (v+1)/2$. I hvert omløp er løsningne gitt ved $\arccos(0.3479) = 1.21547$ og $2\pi - \arccos(0.3479) = 5.06771$. Dette gir bare en løsning for x: $\underline{x = 1.1077}$.

d)* $\sin(x^2+3x) = 0.5567$ hvor $x \in [-2, 4]$.

Ved å fullføre kvadratet x^2+3x ser vi at vinklenen ligger i intervallet $[-2.25, 28]$. Løsningene til likningen $\sin(v) = 0.5567$ er $\arcsin(0.5567)+2\pi n$ og $\pi-\arcsin(0.5567)+2\pi n$ for heltall n. Vi finner løsningene x ved å løse de kvadratisk likningene $x^2+3x = v$ for alle mulige vinkler v i intervallet $[-2.25, 28]$ og velge ut verdiene x i intervallet $[-2, 4]$. (Det nyttig å bruke et verktøy for å forenkle arbeidet.) Her er løsningene

$$\{0.1853, 0.6911, 1.5205, 1.8293, 2.4251, 2.6674, 3.1572, 3.3632, 3.7889, 3.9711.\}$$

Oppgave 14. Finn alle løsningene, i første omløp $[0, 2\pi\rangle$, til ulikhetene. Svaret skal gis eksakt.

a) $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) > 0$.

Likningen $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 0$ er ekvivalent til $\tan(x) = -1/\sqrt{3}$, forutsatt at $\cos(x) \neq 0$. Løsningene er $x = 5\pi/6$ og $x = 11\pi/6$. Funksjonen $f(x) = \sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)$ er kontinuerlig. Den endrer derfor bare fortegn når den passerer et nullpunkt. Vi kan nå sjekke fortegnet i hver intervall $[0, 5\pi/6\rangle$, $\langle 5\pi/6, 11\pi/6\rangle$ og $\langle 11\pi/6, 2\pi\rangle$. (For eksempel er $f(0) = f(2\pi) = 1 > 0, f(\pi) = -1 < 0$.) Vi finner at likningen $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) > 0$ har løsningen

$$\underline{[0, 5\pi/6\rangle \cup \langle 11\pi/6, 2\pi\rangle}.$$

b) $\cos^2(x) + 2\cos(x) + 3/4 \geq 0$.

Uttrykket er et kvadratisk polynom med variabel u lik $\cos(x)$. Det kvadratiske uttrykket

$$u^2 + 2u + 3/4 = (u+3/2)(u+1/2) = 0$$

er større enn eller lik 0 når $u \geq -1/2$ eller $u \leq -3/2$. Ulikheten er derfor ekvivalent til den enklere ulikheten $\cos(x) \geq -1/2$ (den andre ulikheten $\cos(x) \leq -3/2$ har ingen løsning). Løsningen er

$$\underline{[0, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 2\pi\rangle}.$$

c) $\cos^2(x) - \sin(x) < -1$.

Ved å bruke Pytagoras setning er denne ulikheten ekvivalent til $-\sin^2(x) - \sin(v) < -2$ som også ekvivalent til $\sin^2(x) + \sin(v) - 2 > 0$. Siden $\sin(x)$ og $\sin^2(x)$ aldrig er større enn 1 er det <u>ingen løsninger</u> til ulikheten.

d) $\cos(x - 1) < 2\cos^2(x - 1)$.

La vinkelen være $v = x - 1$. Ulikheten er ekvivalent til $2\cos^2(v) - \cos(v) > 0$. Vi faktoriserer uttrykket som et polynom i $u = \cos(v)$ og får $2u^2 - u = u(2u - 1)$. Dette uttrykket er positivt (fortegnskjema) når $\cos(v)$ og $\cos(v) - 1/2$ har samme fortegn. Dette gir følgende løsningsmengde for $v = x - 1$

$$[0, \pi/3\rangle \cup \langle\pi/2, 3\pi/2\rangle \cup \langle 5\pi/3, 2\pi\rangle$$

for v i første omløp. Løsningsmengden for x er derfor

$$\underline{[0, \pi/3 + 1\rangle \cup \langle\pi/2 + 1, 3\pi/2 + 1\rangle \cup \langle 5\pi/3 + 1, 2\pi\rangle}$$

e) $\sin(x) < \sin(2x)$.

Vi kan benytte addisjonsformelen for sinus $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Ulikheten blir da ekvivalent til $2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) = \sin(x)(2\cos(x) - 1) > 0$. Løsningen består av alle x slik at $\sin(x)$ og $2\cos(x) - 1$ har samme fortegn. Løsningsmengden er

$$\underline{\langle 0, \pi/3\rangle \cup \langle\pi, 3\pi/2\rangle}.$$

f) $2\cos(2x) + 8\cos(x) + 5 \geq 0$

Addisjonsformlene for cosinus samt Pytagors sin sats gir at $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Derfor er uttrykket i ulikheten ekvivalent til $4\cos^2(x) + 8\cos(x) + 3$. Dette kvadratiske uttrykket i $\cos(x)$ faktoriserer som $(2\cos(x) + 1)(2\cos(x) + 3)$. Den andre faktoren er altid større eller lik 1 så uttrykket er ikke-negativt når $\cos(x) + 1/2$ er ikke-negativt. Løsningsmengden er derfor

$$\underline{[0, \pi/3] \cup [5\pi/3, 2\pi\rangle}.$$

Oppgave 15. Gitt funksjonen

$$f(x) = \cos^2(x) - \sin(x) + 1$$

med definisjonsmengde $[-\pi, \pi]$. Finn nullpunktene og vendepunktene til $f(x)$. Avgjør hvor $f(x)$ vokser og avtar. Finn ekstremalpunktene til $f(x)$. Lag en skisse av grafen til $f(x)$.

Fra oppgave 3c) har $f(x)$ nullpunkt når $\sin(x) = 1$. I gitte intervall er det for $x = \pi/2$. Den deriverte til $f(x)$ er

$$f'(x) = -2\sin(x)\cos(x) - \cos(x) = -\cos(x)(2\sin(x) + 1).$$

Dette er også lik $-\sin(2x) - \cos(x)$. Den dobbeltderiverte til $f(x)$ er

$$f''(x) = -2\cos(2x) + \sin(x) = -2\cos^2(x) + 2\sin^2(x) + \sin(x).$$

Dette er lik $4\sin^2(x) + \sin(x) - 2$.

Den deriverte $f'(x)$ er lik 0 når $x = \pm\pi/2$ og $x = -\pi/6$ og $x = -5\pi/6$. Et fortegnskjema for de to faktorene i $f'(x) = -\cos(x)(2\sin(x) + 1)$ gir at $f(x)$ er økende for x i intervallene

$$[-\pi, -5\pi/6], \ [-\pi/2, -\pi/6] \ \text{ og } \ [\pi/2, \pi]$$

og avtagende for x i intervallene

$$[-5\pi/6, -\pi/2] \ \text{ og } \ [-\pi/6, \pi/2].$$

Vi har følgende lokale topppunkt $(-5\pi/6, 9/4)$ og $(-\pi/6, 9/4)$ samt $(\pi, 2)$, og følgende lokale bunnpunkt $(-\pi, 2)$, $(-\pi/2, 2)$ og $(\pi/2, 0)$. Det sistnevnte er globalt bunnpunkt. Det er to globale toppunkt $(-5\pi/6, 9/4)$ og $(-\pi/6, 9/4)$.

Vi ser nå etter vendepunkt. Den dobbelderiverte er lik 0 når

$$4\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0.$$

Dette er en kvadratisk likning i $\sin(x)$. Løsningene til den kvadratiske likningen er $\sin(x) = (-1 \pm \sqrt{33})/8$. Dette gir fire løsninger for x. Tilhørende verdi til $f(x)$ er $2 - \sin(x) - \sin^2(x) = 2 - \sin(x) - (2 - \sin(x))/4$ som er lik $3(2 - \sin(x))/4 = 3(17 - \pm\sqrt{33})/32$.

Vendepunktene er

$$(0.6348, 1.0551), (2.5067, 1.0551), (-1.0029, 2.1323) \quad \text{og} \quad (-2.1386, 2.1328).$$

Eg synest grafen ligner på jeksler (periodisiteten tatt i betraktning).

3 Vanskelige oppgaver

Oppgave 16. Her er et standard eksempel som viser at den deriverte ikke alltid trenger være en kontinuerlig funksjon. Vis at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 \sin(1/x) & 0 < x \end{cases}$$

er deriverbar i alle punkt, men at den deriverte ikke er kontinuerlig i $x = 0$.

Fra definisjonen av den deriverte er $f'(0) = 0$: Den høyrederiverte er lik

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$$

og den venstre deriverte er opplagt lik 0. Den deriverte til $x^2 \sin(1/x)$ er $2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Derfor er f deriverbar i alle punkt og

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & 0 < x \end{cases}$$

Denne funksjonen er ikke kontinuerlig i 0 siden $\lim_{x \to 0^+} \cos(1/x)$ ikke eksisterer.

Oppgave 17. Bestem lengden på alle sidene og finn alle vinklene til alle trekantene spesifisert som følger:

a) Trekantene er rettvinkla og to av sidene har lengde 4 og 5.

Tilfellet 1: Katetene har lengde 4 og 5. Da har hypotenus lengde

$$\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \approx 6.403.$$

Vinkelen som har kateten med lengde 5 som hosliggende katet er da lik

$$\arctan(4/5) \approx 38.660°.$$

Den andre vinkelen, som har kateten med lengde 4 som hosliggende katet, er da lik $90° - 38.660° = 51.340°$.

Tilfellet 2: Hypotenus er lengre enn katetene. En mulighet er at 5 er lengden på hypotenus og 4 er lengden på den ene kateten. Lengden på den andre kateten er da $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ (eksakt). Vinkelen som har kateten med lengde 4 som hosliggende katet er da lik $\arccos(4/5) \approx 36.870°$. Den andre vinkelen, som har kateten med lengde 3 som hosliggende, er da lik $90° - 36.870° = 53.130°$.

b) Trekantene er likebeina og en av vinklene er 30 grader og en av sidene har lengde 10.

Tilfellet 1: Vinkelen mellom de to sidene som er like lange er 30 grader. Da er de to andre vinklene $(180° - 30°)/2 = 75°$. Hvis de to sidene som er like lange har lengde 10 har den tredje siden lengden $2 \cdot 10 \sin(15°) \approx 5.176$.

Tilfellet 2: Vinklenen som i tilfellet 1, men anta at det er siden som ikke er like lang som en annen side som har lengde 10. Da er lengden på de to sidene som er like lange lik $(10/2)/\sin(15°) \approx 19.316$.

Tilfellet 3: La oss nå anta at vinkelen på 30 grader ikke er vinkelen mellom sidene som er like lange. Da er begge disse vinklene 30 grader, og vinkelen mellom de like lange sidene er 120°. Hvis de to like lange sidene har lengde 10, da er lengden på den tredje siden $2 \cdot 10 \cdot \sin(60°) = 10\sqrt{3} \approx 17.320$.

Tilfellet 4: La vinklene være som i tilfellet 3. En annen mulighet er at de to like sidene har lengde $10/\sqrt{3} \approx 5.774$ og at den tredje siden har lengde 10.

c) Den ene vinkelen er 30 grader og to av sidene har lengde 8 og 5.

La side a ha lengde 8 og side b ha lengde 5. Vi undersøker hvilke trekanter vi kan ha når vi setter hver av de tre vinklene i trekanten lik vinkelen 30°.

Tilfellet 1: Vinkel C er 30 grader. Ved cosinussetningen er da

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(30°) = 89 - 40\sqrt{3} = 19.717.$$

Derfor er lengden på den tredje siden $c = 4.440$. Ved sinussetningen er

$$\sin(\angle A) = 8\sin(30°)/c = 0.9008.$$

Derfor er $\angle A$ er lik 64.26° eller $(180 - 64.26)° = 115.74°$. Sinussetningen gir også at $\sin(\angle B) = 5\sin(30°)/c = 0.5630$. Dette gir at $\angle B$ er lik 34.26° eller 145.74°. Vi ser at de eneste kombinasjoner av vinklene som har sum 180° er $\angle A = 115.74°$, $\angle B = 34.26°$, $\angle C = 30°$.

Tilfellet 2: Vinkel B er 30 grader. Ved sinussetningen så er

$$\sin(\angle A) = a\sin(\angle B)/b = 4/5.$$

Derfor er $\angle A$ lik 53.13° eller 126.87°. Når $\angle A = 53.13°$ er da $\angle C = 96.87°$. Ved sinussetningen er da lengden på den siste siden er da lik

$$c = \sin(\angle C)b/\sin(\angle B) = 9.93 \quad \text{(rundet opp fra 9.928).}$$

Tilfellet 3: Vinkel B er 30 grader, men vi ser på den andre muligheten for vinkel A fra Tilfellet 2. Da er $\angle A = 126.87°$. Og derfor er $\angle C = 23.13°$ Ved sinussetningen er da $c = \sin(\angle C)b/\sin(\angle B) = 3.928$.

Tilfellet 4: Vinkel A er lik 30 grader. Ved sinussetningen er

$$\sin(\angle B) = b\sin(\angle A)/a = 5/16 = 0.3125.$$

Dette gir at $\angle B$ er lik 18.21 eller 161.79 grader. Vinkelen $\angle B = 161.79°$ er ikke mulig siden summen av vinklene

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Hvis $\angle B = 18.21°$, da er $\angle C = 131.79°$. Lengden på den siste siden er $c = a\sin(\angle C)/\sin(\angle A) = 11.93$.

d) Trekanten har sider av lengde 2, 3 og 4. Vi gir navn til hjørnene i trekanten slik at side a har lengde 2, side b har lengde 3 og side c har lengde 4. Fra cosinussetningen har vi at $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle C)$. Dette gir at $\cos(\angle C) = -1/4$. Derfor er $\angle C = \arccos(-1/4) = 104.48°$. Ved sinussetningen så er $\sin(\angle B) = b\sin(\angle C)/c = 0.72618$. Siden summen av vinklene skal være 180° så er bare $\angle B = 46.57$ en mulig løsning. Vinkel A må da være $\angle A = 28.96°$.

Oppgave 18. Alle trekanter kan innskrives i en sirkel. Det vil si at det finnes en sirkel med radius R slik at trekanten ligger inni sirkelen og hjørnene til trekanten ligger på selve sirkelen (avstanden fra hvert av hjørnene til senteret er R). Radien R er bestemt av trekanten. I denne oppgaven skal dere vise at en trekant med sider a, b og c kan innskrives i en sirkel med radius lik

$$R = \frac{abc}{\sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}.$$

LF: Dette resultatet følger ved å sette inn uttrykket for A i deloppgave b) inn i uattrykket for R i deloppgave a).

a) Vis at en trekant med areal A hvor sidene har lengde a, b og c kan innskrives i en sirkel med radius lik

$$R = \frac{abc}{4A}.$$

LF: Arealet er lik $ab\sin(\angle C)/2$. Vi har også at $c/2 = R\sin(\angle C)$. Dette ser vi ved å benytte den likebeina trekanten med hjørner A og B samt senteret i sirkelen. Løser vi ut for $\sin(\angle C)$ gir dette $A = abc/(4R)$. Dette gir resultatet $R = abc/(4A)$.

b) Vis at arealet til en trekant med sider av lengde a, b og c er lik

$$A = \frac{\sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{4}.$$

(Hint: Cosinussettning og arealsettning, samt Pytagoras sats $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$.)

Ved cosinussetningen så er $\cos(\angle C) = (c^2 - a^2 - b^2)/(2ab)$. Siden vinklene i en trekant er mellom 0 og 180 grader er alltid sinus av en slik vinkel ikke-negativ. Derfor er $\sin(\angle C) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle C)}$ Arealet er lik

$$A = ab\sin(\angle C)/2 = \frac{ab}{2}\sqrt{\frac{4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2b^2}}.$$

Siden a og b er positive er dette lik $\frac{\sqrt{4a^2b^2 - (c^4 + a^4 + b^4) + 2(a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2)}}{4}$. Dette gir resultatet.

Hvis vi faktoriserer uttrykket i roten får vi $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$. Formelen for arealet til en trekant med sider av lengde a, b og c er mest kjent som

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

hvor $s = (a + b + c)/2$. Dette kalles *Herons formel.*