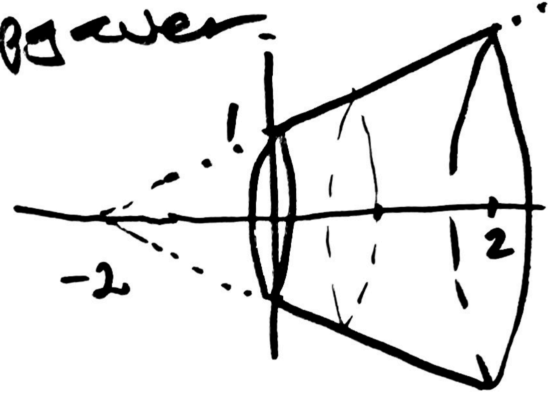
28.04.23

Noen oppgaver inspirert av eksamensoppgaver.



$f(x) = 1 + \frac{x}{2}$

(1)

Området avgrenset av $f(x)$, x-aksen og linjene $x=0$ og $x=2$ roteres 360° om x-aksen. Finn volumet til legemet som fremkommer.

$$V = \int_0^2 \pi\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\right) dx$$

kan gange ut...

$u = 1 + \frac{x}{2}$ $\quad u' = \frac{1}{2}$

$du = \frac{1}{2}dx$

$2du = dx$

$u(0) = 1$

$u(2) = 2$

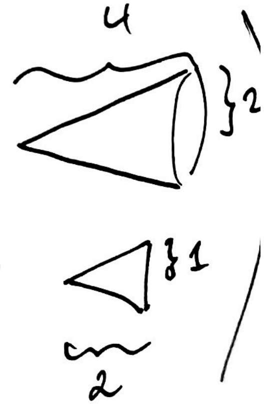
$$= \pi \int_1^2 u^2 \cdot 2du$$

$$= 2\pi \left.\frac{u^3}{3}\right|_1^2$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{2\cdot 7\pi}{3} = \frac{14\pi}{3}$$

Volumet er $\underline{\underline{\frac{14\pi}{3}}}$

(Alternativt:
V = Volum til kjegle
− Volum til kjegle)



$u = 1 + x^2$

$u' = 2x$

$du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}du = x\,dx$

$3\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

$= 3\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

$= 3\int \frac{1}{u+1}\,2du$

$= 3 \cdot 2 \ln|u+1| + C$

$= 6 \ln(\sqrt{x}+1)$

P

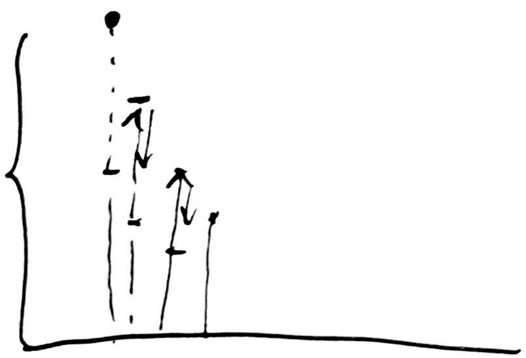
1

2

(ex 19)

③ En sprett-ball slippes fra en høyde på 3m den spretter opp til en høyde som er redusert med 25%. Ballen beveger seg bare vertikalt. Hvor langt beveger ballen seg (strekning tilbakelagt) når tiden $\to \infty$?

$d = 3m$



$k = \frac{3}{4}$

$$d + 2d \cdot k + 2dk \cdot k + 2dk^3 + 2dk^4 + \cdots$$

$$= -d + 2d(1 + k + k^2 + k^3 + \cdots k^n)$$

når $n \to \infty$

$$D = -d + 2d\frac{1}{1-k} \qquad \left(= d + 2d\frac{k}{1-k}\right)$$

Setter inn tallene:

$$D = -3 + 2 \cdot 3\left(\frac{1}{1-3/4}\right) = 3(-1 + 2 \cdot 4)$$

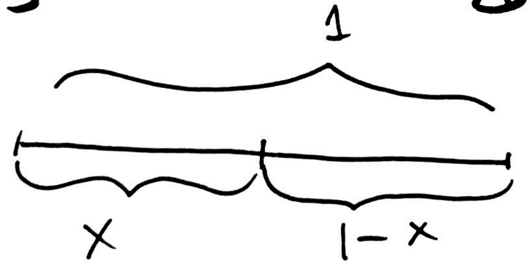
$$= 3 \cdot 7 = \underline{21}$$

④ (ex 2016)

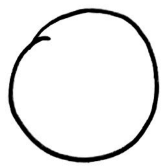
Et tau har lengde 1m.
Det kuttes i to deler.
Delen med lengde x formes til en sirkel
og delen med lengde $(1-x)$ formes til en (lukket) halvsirkel.

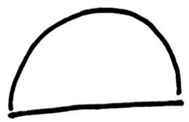
a) Finn totalt areal som en funksjon av x

b) Bestem x slik at totalt areal blir minst mulig og størst mulig.



$0 \le x \le 1$





$O_2 = \pi r + 2r = (\pi + 2) r$

$A_2 = \frac{\pi r^2}{2}$

$x = O_1 = 2\pi \cdot r$

$A_1 = \pi r^2$

Radius til sirkelen: $r = \frac{x}{2\pi}$ arealet $A_1 = \pi \cdot r^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$

$$A_1 = \frac{x^2}{4\pi}$$

5

$1-x = O_2 = (\pi+2)r$

radius til halvsirkelen: $r = \frac{1-x}{\pi+2}$, $A_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1-x}{\pi+2}\right)^2$

$$= \frac{\pi}{2(\pi+2)^2}(1-x)^2.$$

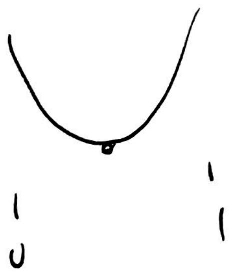
a) Totalt areal $A = A_1 + A_2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{\pi}{2(\pi+2)^2}(1-x)^2$

b) $A'(x) = \frac{2x}{4\pi} + \frac{\pi}{2(\pi+2)^2} \cdot 2(1-x) \cdot \underbrace{(1-x)'}_{-1}$

$= \frac{x}{2\pi} + \frac{\pi}{(\pi+2)^2}(x-1) = 0$ stasjonere punkt.

$x\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\pi}{(\pi+2)^2}\right) = \frac{\pi}{(\pi+2)^2}$

$$x_0 = \frac{\pi/(\pi+2)^2}{1/2\pi + \pi/(\pi+2)^2} = \frac{1}{\frac{(\pi+2)^2}{2\pi^2} + 1}$$



Vi må også sjekke endepunktene (lokale toppunkt.)

6

$A(0) = \frac{\pi}{2(\pi+2)^2} = 0.059$ $\quad$ $A(1) = \frac{1}{4\pi} \sim 0.079$

$x_0 \sim 0.427.$

$A(x_0) = 0.034018..$

Arealet er størst når $x=1$, hele tauet benyttes til sirkelen,

$A = \underline{0.079}$

Arealet er minst når $x_0 \sim 0.43$

$A \sim \underline{0.034}$

7) La $f(x) = \dfrac{x^2-5}{x-3}$

Finn:

a) ✓ Definisjonsområde, nullpunkt. og asymptoter

b) Derive $f(x)$

Bestem monotoniegeskapene og finn ekstremalpunktene

c) Finn arealet avgrenset av grafen til $f(x)$, x-aksen og $x=0$, $x=2$.

a) Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{l} x^2 \quad -5 : x-3 = x+3+\dfrac{4}{x-3} \\ \underline{x^2-3x} \\ \quad 3x-5 \\ \quad \underline{3x-9} \\ \qquad 4 \end{array}$$

$$f(x) = x+3+\frac{4}{x-3}.$$

Naturlig def. område $\underline{\mathbb{R}\setminus\{3\}}$

$= \langle -\infty, 3\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle.$

8

Nullpunkt $f(x) = 0$

$$x^2 - 5 = 0$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \underline{\pm\sqrt{5}}$$

Nullpunkt $\underline{-\sqrt{5} \text{ og } \sqrt{5}}$.

Vertikal asymptote $\underline{\underline{x = 3}}$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$

Skrå asymptote $\underline{y = x + 3}$

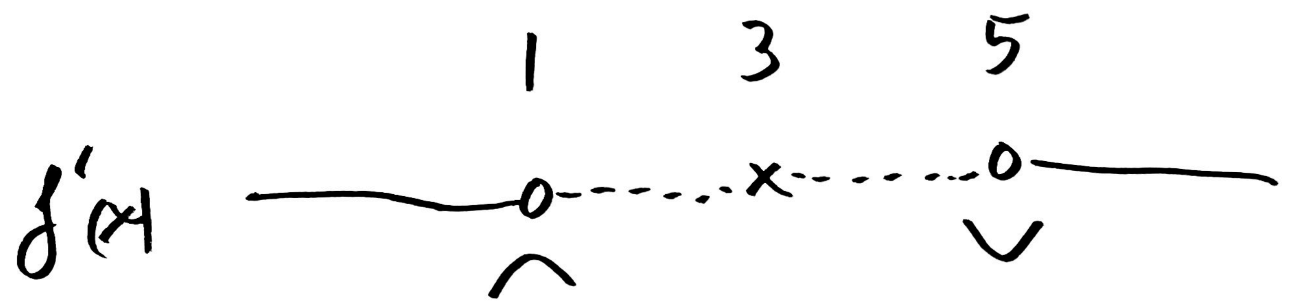
b) $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3} = x + 3 + \frac{4}{x - 3}$

$$f'(x) = 1 + 0 + 4\left((x-3)^{-1}\right)' = 1 - \frac{4}{(x-3)^2} = \frac{(x-3)^2 - 4}{(x-3)^2}$$

$f'(x) = 0$: $(x-3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4$

$$x - 3 = \pm 2$$
$$x = 3 \pm 2$$

$$\underline{x = 1 \text{ og } 5}$$



(a) Lokalt toppunkt i $(1, f(1)) = \underline{(1, 2)}$

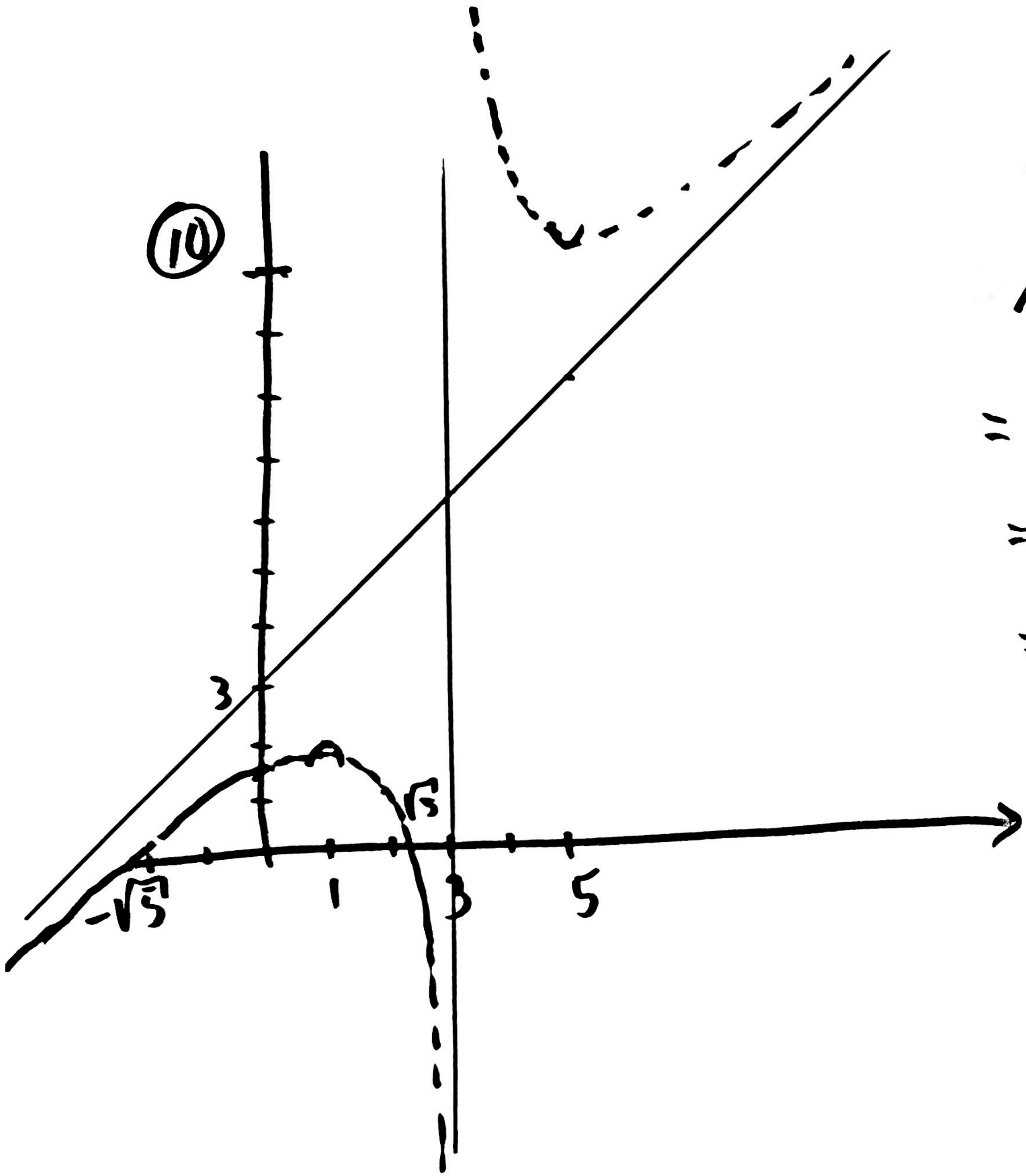
bunnpunkt i $(5, f(5)) = \underline{(5, 10)}$

$f(x)$ vokser i $\langle -\infty, 1]$ og i $[5, \infty\rangle$

avtar i $[1, 3\rangle$ og i $\langle 3, 5]$.

$\Big\}$ monotoniegenskapene.

10



c) Arealet:

$$A = \int_0^2 x+3+\frac{4}{x-3}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 4\ln|x-3| \Big|_0^2$$

$$= \frac{2^2}{2} + 3\cdot 2 + 4(\ln(1) - \ln(3))$$

$$= 8 - 4\ln(3)$$

$$= 4(2-\ln 3)$$

$$(\sim 3.60555084 5327\ldots)$$

$$\sim \underline{3.60}$$

spørsmål

(11)

$$-\int \frac{4x}{x-4}\,dx$$

løsning

$$\frac{4x}{x-4} \overset{\text{pol. div}}{=} \frac{4(x-4)+16}{x-4}$$

$$= 4 + \frac{16}{x-4}$$

$$\int 4 + \frac{16}{x-4}\,dx = \underline{4x + 16\ln|x-4| + C}$$

$u = \sin x$

$u' = \cos x$

eksempel * $\int \cos^5 x = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)^2\,dx$

$$= \int (1-u^2)^2\,du$$

$$= \int 1 - 2u^2 + u^4\,du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \underline{\sin x - \frac{2}{3}(\sin x)^3 + \frac{1}{5}(\sin x)^5 + C}$$

(12)

* $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$= \int 1\,du$

$= u + C$

$= \underline{\arcsin(x) + C}$

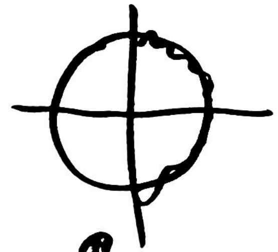
$x = \sin u$

$x' = \cos u = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-x^2}$

$dx = \cos u\,du$

$\frac{dx}{\cos u} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$

$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$



$u = \sin^{-1} x = \arcsin(x)$

Delvis integrasjon av bestemte integral

$\int_a^b f(u)\,u'\,dx$

$= F(u(x))\Big|_a^b$

$= \underline{F(u(b)) - F(u(a))}$

$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$

$F'(u) = f(u)$

F antiderivert til f.

$\frac{d}{dx} F(u(x)) = F'(u(x)) \cdot u'(x)$

$= f(u) \cdot u'$

(13)

$$\int_{-1}^{2} 2x\,(1+x^2)^2\,dx$$

$u = 1+x^2$ $\quad$ $u(-1) = 2$

$u' = 2x$ $\quad$ $u(2) = 5$

$$\int_{-1}^{2} u' \cdot u^2\,dx$$

$$= \frac{u^3(x)}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\left(u(2)^3 - u(-1)^3\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{3}\left(5^3 - 2^3\right)}$$

$$\int_{2}^{5} u^2\,du = \frac{1}{3}u^3\Big|_{2}^{5} = \underline{\frac{1}{3}\left(5^3 - 2^3\right)}$$