30 mars 2023 **Delvis integrasjon** 17.6

$$(x \cdot \sin x)' = \underbrace{(x)'}_{1} \sin x + x \underbrace{(\sin x)'}_{\cos x}$$

$$= \sin x + x \cos x$$

$$x \cos x = (x \sin x)' + (\underbrace{- \sin x}_{(\cos x)'})$$

$$= (x \sin x + \cos x)'$$

Derfor $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c$

Kjerneregelen $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Så $\int f' g + f g' \, dx = f \cdot g + c$

$$\int f' g \, dx + \int f g' \, dx = f \cdot g + c$$

Delvis integrasjon:

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx$$

$$\int \underset{f'}{x^3} \underset{g}{\ln|x|}\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\ln|x|\right] - \int \underbrace{\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}}_{\frac{x^3}{4}}\, dx$$

$$f = \frac{x^4}{4}$$

$$\int x^3 \ln|x|\, dx = \frac{x^4}{4}\ln|x| - \frac{x^4}{16} + C$$

$$\int \ln|x|\, dx = \int \underset{f'}{1} \cdot \underbrace{\ln|x|}_{g}\, dx$$

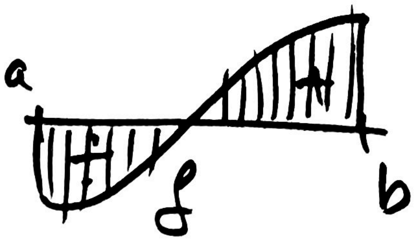
(velge $f = x$)

$$= \underset{f}{x} \underset{g}{\ln|x|} - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{1}\, dx$$

$$= x\ln|x| - x + c$$

Hvorfor skriver vi dx?

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



$$\sim \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

(alle oppdelinger etc)

$$\Delta x_i \rightsquigarrow dx$$

$$\Sigma \rightsquigarrow \int$$

$$\int f(x)\,dx$$

dx nyttig når vi har flere variabler

$$\int a^2 + c^3\,da \neq \int a^2 + c^3\,dc$$

substitusjon

$$\int u' f(u)\,dx = \int f(u)\,du$$

$u' = \frac{du}{dx}$ så $^* u'dx = \frac{du}{dx}dx$ kan erstattes av du.

$$\int \frac{1}{x\ln|x|}dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln|x|}dx$$

Forsøker $u = \ln|x|$, $u' = \frac{1}{x}$

$$= \int u' \frac{1}{u}dx$$

$$= \int \frac{1}{u}du$$

$$= \ln|u| + C$$

$$= \underline{\ln|\ln|x|| + C}$$

Bestemt integral

$$\int_a^b f'\cdot g\,dx = f\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f\cdot g'\,dx$$

Delvis integrasjon leder ofte til rekursive formler.

$$\int \underbrace{x^n}_{f}\, \underbrace{e^{x}}_{g'}\, dx = \underset{f}{x^n}\, \underset{g}{e^x} - \int \underset{f'}{nx^{n-1}} \cdot e^x\, dx$$

Rekursiv formel:

$$\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\, dx$$

benytter dette:

$$\int x^3 e^x\, dx = x^3 e^x - 3\underbrace{\int x^2 e^x\, dx}_{x^2 e^x - 2\int x e^x dx}$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\underbrace{\int x e^x\, dx}_{x e^x - e^x} + c$$

$$= \underline{(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\, e^x + c}$$

$$\int x^{30} e^x\, dx \cdots = (\text{pol. av grad } 30) \cdot e^x + c$$

$$\int \underbrace{3x}_{f} \underbrace{e^{-2x}}_{g'} dx$$

Finner en g:

$$\int e^{-2x} dx$$

lin. substitusjon

$$-2 = (-2x)' = u' = \frac{du}{dx}$$

$$\int e^{u} \frac{1}{-2} du$$

$$= \frac{-1}{2} e^{-2x} + C$$

$$g = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$= 3x\left(\frac{-1}{2} e^{-2x}\right)$$

$$- \int 3\left(\frac{-1}{2} e^{-2x}\right) dx$$

$$= 3x\left(\frac{-1}{2}\right) e^{-2x} + \frac{3}{2} \int e^{-2x} dx$$

$$= \frac{-3}{2} x e^{-2x} + \frac{3}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) e^{-2x} + C$$

$$= \left(\frac{-3}{2} x - \frac{3}{4}\right) e^{-2x} + C$$

$$\int \underbrace{\sin x}_{u} \cdot \underbrace{e^{x}}_{v'} dx = \underbrace{\sin x}_{u} \cdot \underbrace{e^{x}}_{v}$$

$$- \int \underbrace{\cos x}_{f} \cdot \underbrace{e^{x}}_{g'} dx$$

$$= \sin x \cdot e^{x} - \Big[\cos x \cdot e^{x} - \int (-\sin x)\, e^{x}\, dx \Big]$$

$$= \sin(x)\, e^{x} - \cos(x) \cdot e^{x}$$

$$- \int \sin x \; e^{x} dx$$

flytter over til andre side.

$$2 \int e^{x} \sin x\, dx = e^{x}(\sin x - \cos x) + C$$

$$\underline{\int e^{x} \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^{x}(\sin x - \cos x) + C}$$

Test Forkurs Matematikk OsloMet
30. mars 2023

Oppgave 1. Benytte delvis integrasjon til å finne det ubestemte integralet

$$\int 5xe^x \, \mathrm{d}x$$

Oppgave 2. Benytt substitusjon til å finne det ubestemte integralet

$$\int \frac{x}{x^2 - 4} \, \mathrm{d}x$$

Oppgave 3. Finn det bestemte integralet

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Oppgave 4 (Ekstraoppgave). Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{x}{\sqrt{2 - 3x}} \, \mathrm{d}x$$

LF på neste side

Test Forkurs Matematikk OsloMet
30. mars 2023

Oppgave 1. Benytte delvis integrasjon til å finne det ubestemte integralet

Lar $f(x) = e^x$

$$\int 5xe^x \, dx = 5\int \underset{g}{x}\, \underset{f'}{e^x}\, dx$$

$$= 5\left(xe^x - \int \underset{g'}{1} \cdot \underset{f}{e^x} dx\right)$$

$$= \underline{5(xe^x - e^x) + C} = \underline{5(x-1)e^x + C}$$

Oppgave 2. Benytt substitusjon til å finne det ubestemte integralet

$$\int \frac{x}{x^2-4} \, dx$$

$$= \int x \cdot \frac{1}{x^2-4} \, dx$$

$$= \int \frac{u'}{2} \frac{1}{u} \, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + c = \underline{\frac{1}{2}\ln|x^2-4| + c}$$

$u = x^2 - 4$

$u' = 2x$

$x = \frac{u'}{2}$

Oppgave 3. Finn det bestemte integralet

$$\int_0^\pi \underset{f}{x} \underset{g'}{\cos x} \, dx$$

regnet ut det ubest. $\int$ i time

$$= (x\sin x + \cos x)\Big|_0^\pi$$

$$= (\pi\sin(\pi) + \cos(\pi)) - (0 + \cos(0)) = \underline{\underline{-2}}$$

Oppgave 4 (Ekstraoppgave). Finn det ubestemte integralet

svar: $\frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + c$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2-3x}} \, dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[4\sqrt{2-3x} - \frac{2}{3}(2-3x)^{3/2}\right] + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{u}} \left(\frac{+1}{-3}\right) du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}} \left(\frac{1}{3}(2-u)\right) du$$

$$= \frac{1}{3}\int 2u^{-1/2} - u^{1/2} \, du \ldots$$

$u = 2 - 3x$

$u' = -3$

$\frac{du}{dx} = -3$

$3x = 2 - u$

$x = \frac{1}{3}(2-u)$