10 mars 23.

Geometriske følger og rekker 15.5-6

$a_{n+1} = k a_n$ $n \geq 0$ kvotient k

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

$n+1$-te ledd.

$\underline{a_n = k^n a_0}$

$a_n = k^{n-1} a_1$

$a_n = k^{n-m} a_m$

Eksempler $a_0 = 1$

$k=2$ $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$

$k=-2$ $1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots$

$k=0$ $1, 0, 0, 0, \ldots$

$k=1$ $1, 1, 1, 1, \ldots$ konstant følge.

$a_0 = 0$ for alle k

$0, 0, 0, \ldots$

$4, 4, 4, \ldots$ kostant følge $a_0 = 4$, $k = 1$

$8, 16, 32, 64, \ldots$ $a_0 = 8$, $k = 2$

$1, 2, 4$

a_0, a_1 geometrisk følge når $a_0 \neq 0$: $k = \frac{a}{a}$

(samt $a_0 = a_1 = 0$)

Finn kvotient k, a_0, a_1 til den geometriske følgen med $a_4 = 6$ og $a_5 =$

$k = \frac{a_5}{a_4} = \frac{18}{6} = 3$, $a_3 = \frac{a_4}{3} = 2$, $a_2 = \frac{a_3}{3} = \frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{a}{3}$

$a_0 = \frac{a_1}{3} = \underline{\frac{2}{27}}$

Ex Finn k og a_0 når $a_4 = 2$ og $a_7 = -16$.

$a_7 = k^3 a_4$ så $k^3 = \frac{a_7}{a_4} = \frac{-16}{2} = -8$

$k = \sqrt[3]{-8} = -2$

$a_0 = \frac{a_4}{k^4} = \frac{a_4}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

$\frac{1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, -4, 8, -16, 32, -64, \ldots$

$a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad a_6 \quad a_7$

– $a_4 = 2$ og $a_8 = -32$

$a_8 = k^4 a_4$

$k^4 = \frac{a_8}{a_4} = \frac{-32}{2} = -16$.

ingen reelle løsninger!

Geometrisk rekke

$a_0 + a_0 k + a_0 k^2 + a_0 k^3 + \cdots + a_0 k^n$ (n+1 ledd)

$a_0 (1 + k + k^2 + \cdots + k^n)$

k=1 $\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n+1 \text{ ledd}} = (n+1) \cdot a$

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = \underline{2^{n+1} - 1}$ alle $n \geq 0$

Delsummer: $S_0 = 1 = 2 - 1$

$S_1 = 1+2 = 3 = 2^2 - 1$

$S_2 = 1+2+4 = 7 = 2^3 - 1$

$S_3 = 1+2+4+8 = 15 = 2^4 - 1$

$S_4 = 1+2+4+8+16 = 31 = 2^5 - 1$

etc

Formelen for summen stemmer for $n=0$ (og $1, \dots, 4$)

anta sant for n vi viser at da er formelen også gyldig for $n+1$.

$$\underbrace{(1+2+\cdots+2^n)}_{2^{n+1}-1}+2^{n+1} = 2^{n+1}+2^{n+1}-1$$
$$= 2\cdot 2^{n+1}-1$$
$$= 2^{n+2}-1$$
$$= \underline{2^{(n+1)+1}-1} \quad \checkmark$$

Resultat

$$1+k+k^2+\cdots+k^n = \begin{cases} \dfrac{k^{n+1}-1}{k-1} & k \neq 1 \\ n+1 & k=1 \end{cases}$$

setter $k = 2$

$$1 + 2 + \cdots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1 \quad \checkmark$$

$k = 4$

$$1 + 4 + 16 + \cdots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = \underline{\tfrac{1}{3}\left(4^{n+1} - 1\right)}.$$

$k = -1$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n$$

$S_n = 1$ n partall

$S_n = 0$ n oddetall

Formelen for summen gir

$$\frac{(-1)^{n+1} - 1}{-1 - 1} = \frac{-1}{2}\left((-1)^{n+1} - 1\right)$$

$$= \frac{-1}{2}\left((-1)(-1)^n - 1\right) = \underline{\tfrac{1}{2}\left((-1)^n + 1\right)} \quad \checkmark$$

$k = 10$ $\quad 1 + 10 + 100 + \cdots + 10^n = \underbrace{1\ldots1111}_{n+1}$

<u>opg</u> Finn summen (fra formelen)

Er svaret rimelig?

$$\frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} = \frac{\overbrace{999\ldots9}^{n+1}}{9} = \underbrace{1\ldots1111}_{n+1}$$

$k = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{-1/2} = -2\right)$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \frac{1}{2^n} = \frac{(1/2)^{n+1} - 1}{1/2 - 1}$$

$$= 2\left(1 - (1/2)^{n+1}\right) = \underline{2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n}$$

$$4 + 12 + 36 + 108 + \cdots + 4 \cdot 3^n$$

$$4(1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^n) = 4\,\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}$$

$$= \underline{2(3^{n+1} - 1)}$$

Formelen for sum av $n+1$ ledd av geometrisk rekke $(k \neq 1)$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + k + k^2 + \cdots + k^n)(k-1) = k^{n+1} - 1$$

"generalisert konjugatsetning"

$n=1$:

$$(k+1)(k-1) = k^2 - 1$$

konjugatsetning.

$$(1+k+k^2+\dots+k^n)(k-1)$$

$$= k(1+k+\dots+k^n) + (-1)(1+k+\dots k^n) = \begin{matrix} k+k^2+k^3+\dots+k^n+k^{n+1} \\ -1-k-k^2-k^3-\dots-k^n \end{matrix}$$

$$= \underline{k^{n+1}-1}$$

opg.

$a_2 = 3 \qquad a_4 = 6$

Finn summen $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ (første $(n+1)$ leddene) for alle mulige geometrisk rekker.

$$a_4 = k^2 \cdot a_2 \Rightarrow k^2 = \frac{a_4}{a_2} = \frac{6}{3} = 2.$$

To løsninger: $k_1 = \sqrt{2} \qquad k_2 = -\sqrt{2}$

$a_0 = \frac{a_2}{k^2} = \frac{3}{2}$ i begge tilfeller.

$$\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{2}+2+\cdots+\sqrt{2}^{n}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2})^{n+1}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}+\cdots(-\sqrt{2})^{n}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{(-\sqrt{2})^{n+1}-1}{-\sqrt{2}-1}\right)$$

opg.

$$x^3+x^4+\cdots+x^n=x^3(1+x+x^2+\cdots+x^{n-3})$$

$$=\begin{cases} x^3\cdot\dfrac{x^{n-2}-1}{x-1} & x\neq 1 \\ n-2 & x=1 \end{cases}$$

Vi setter inn $P_0 = 1000$ kr ved nyttår

Fast rentesats $r = \frac{5}{100} = 0.05$ (5%)

Startet ved inngang til 2000.

setter inn penger til 2010 (starten av 2010)

Hvor mye penger er det ved utgangen av 2022?

setter inn penger 11 ganger.

$$P = P_0 \cdot (1+r)^{22} + P_0 (1+r)^{21} + P_0 (1+r)^{20} + \dots + P_0 (1+r)^{12}$$

$$= P_0 (1+r)^{12} \left(1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{10}\right)$$

$$= P_0 (1+r)^{12} \frac{(1+r)^{11} - 1}{r}$$

$$= 1000 \text{ kr } (1.05)^{12} \frac{(1{,}05)^{11} - 1}{0.05}$$

$$= 20000 \text{ kr } (1.05)^{12} \left((1{,}05)^{11} - 1\right)$$

$$= \underline{25\,513 \text{ kr}}$$

(ved $r = 10\% = 0.1$ blir $P = 116317$!)

Øving

15.61

a) $1+3+9+27+\cdots+19683$

$3^0 \; 3^1 \; 3^2 \; 3^3 \qquad 3^n.$

Hva er n?

$3^n = 19683$ logaritmer...

$n \log 3 = \log(3^n) = \log(19683)$

$$n = \frac{\log(19683)}{\log 3} = 9$$

$$1+3+9+\cdots+3^9 = \frac{3^{10}-1}{3-1} = \underline{29524}$$

c)...