6 mars 2023 15.1 og 2 Følger og rekker

element nummer n.
(endelig)

Tallfølge $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

eks $a_i = i$ $1, 2, 3, 4, \dots, n$ nat. tall ≤ 5

$a_i = 5$ $5, 5, 5, \dots, 5$ bare 5.

$a_i = i^2$ $1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2$ kvadrattall

$a_i = \frac{1}{i}$ $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$

merk: mengden $\{1, 2, 3, 4\}$ er ikke en følge
$= \{3, 2, 1, 4\}$
har ikke en gitt rekkefølge. !

Følge gitt rekursiv a_n n ...

$a_1 = 1$

* $1, 2, 6, 24, 120, \ldots, \quad a_n = n!$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geq 2$

* $F_0 = 0, \ F_1 = 1$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$

Fibonacci tallene.

Regner dem ut i Python $\quad (F_0, F_1) \rightsquigarrow (F_1, F_2)$

$$F_2 = F_0 + F_1$$

gjentar prosedyren.

Følge av positive partall ordnet etter størrelse

$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6, \dots$

$a_{n+1} = a_n + 2$

$a_i = 2i$

oddetall:

$b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 5, \dots$

$b_{n+1} = b_n + 2$

$b_i = 2i - 1$

aritmeti følger

* $a_n = (-1)^n$

$a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1, \dots$

* $g_{n+1} = 2 \cdot g_n$

$g_1 = 1 \quad g_2 = 2,\ g_3 = 4,\ g_4 = 8$

$\dots\ g_i = 2^{i-1}$

geometrisk følge

Følgen av primtall ordnet etter størrelse $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$

Det finnes ikke noen formel for p_n

Tallfølge av data: F eks. daglig temperatur.

T_i dag nummer i

15.2 Rekker

oppstilt sum $\quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$1+2+3+\cdots+n$ endelig rekke

$1+2+3+\cdots+n+\cdots$ uendelig rekke
har ingen sum!

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ har sum $\frac{\pi^2}{6}$

Rekken $1+2+3+4$ har sum 10.

Σ gresk sigma

Notasjon (skrive måte)

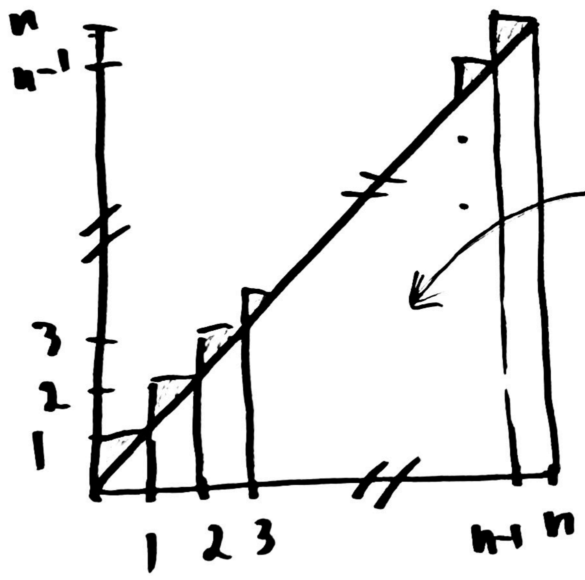
$$a_1+a_2+\cdots+a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

"sum fra $i=1$ til n av a_i"

"sum av a_i fra $i=1$ til n"

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$S_n = 1+2+3+4+\cdots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$



S_n = sum av arealet til søylene.

areal trekant, stor : $\frac{n \cdot n}{2}$

$+ n \cdot$ (areal små trekanter) $1/2$

$$= \frac{n^2}{2} + n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

(benytter: $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{(i+1) - i}{i(i+1)}$)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \underline{1 - \frac{1}{n+1}}$$

"teleskoprekke"

$$\frac{1}{i(i+1)} \leq \frac{1}{i^2} \leq \frac{1}{i(i-1)}$$
$(i \geq 2)$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)}$$

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq \quad \text{—"—} \quad \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Detaljer

Resultat

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \qquad n \geq 0$$

Riktig for $n = 0, 1, 2$

Anta riktig for n viser da at formelen er riktig for $n+1$:

$$\underbrace{F_0 + F_1 + \cdots + F_n}_{F_{n+2} - 1} + F_{n+1} = \underbrace{F_{n+2} + F_{n+1}} - 1$$

$$= F_{n+3} - 1$$

$$= \underline{F_{(n+1)+2} - 1} \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{i(i+1)} \leq \frac{1}{i^2} \leq \frac{1}{i(i-1)} \qquad (i \geq 2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2}$$

$$\leq 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i-1)} \qquad j+1=i$$

$$= 1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(j+1)j}}_{1-\frac{1}{n}}$$

$$= \underline{2 - \frac{1}{n}}.$$

Eks.

$$-1+1-1+1-\cdots(-1)^n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^n$$

Hva er summen?

$S_n = 0$ n jevn

$S_n = -1$ n odde

$$\sum_{n=1}^{m}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=1}^{m} b_n$$

$a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots \quad a_n+b_n = a_1+\cdots+a_n+b_1+\cdots+b_n$

rekkefølgen endret!

Hvis summene eksistere, er summene like.

(m endelig)

Øving. hint til oblig 6 #9

$$2x + 3y + z = 10$$
$$-x + y + 3z = 4$$

Finn ett felles punkt i plana.

DVS. finn en felles løsning til begge likningene.

2 likninger 3 ukjente.

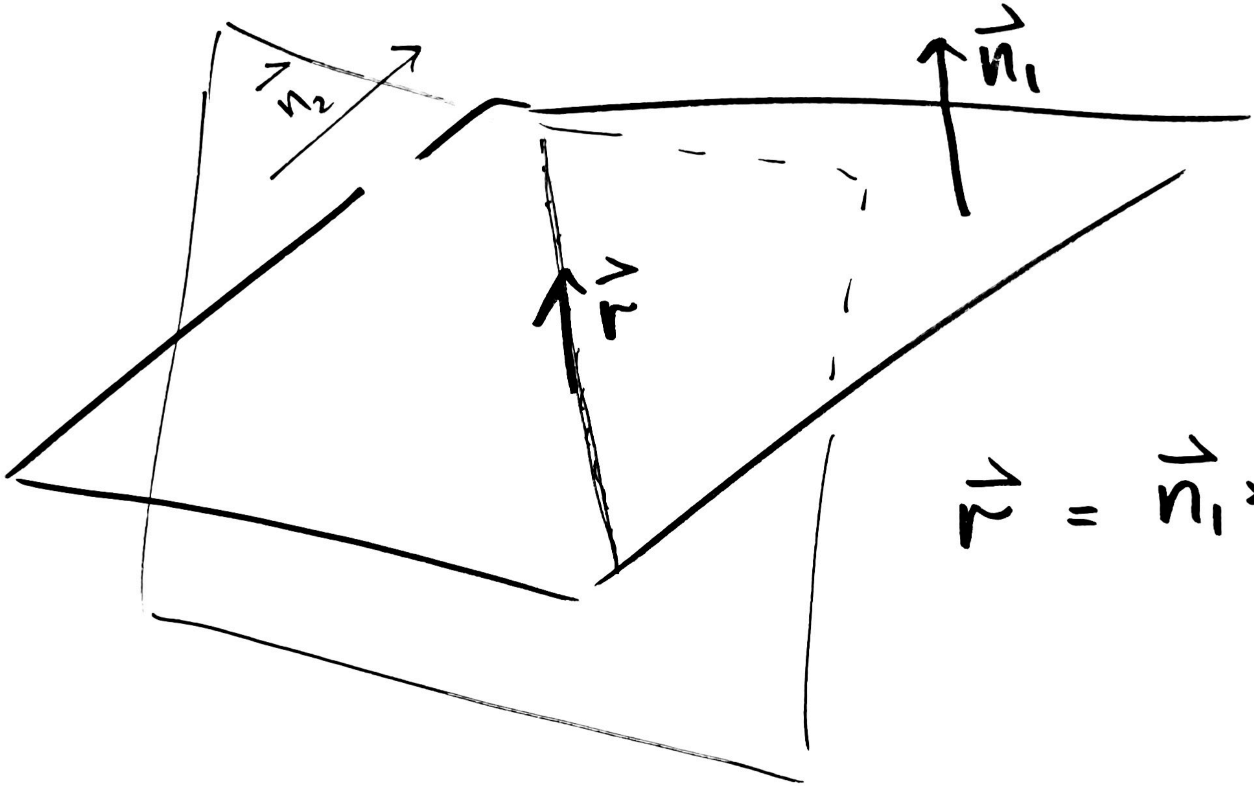
Prøver med $z = 0$ (snittet med xy-planet, om mulig)

$$2x + 3y = 10$$
$$-x + y = 4$$

$2L_2 + L_1$ $\quad 5y = 10 + 2 \cdot 4 = 18$ så $y = \frac{18}{5} = \underline{3.6}$

$$x = y - 4 = \frac{18}{5} - \frac{20}{5} = \frac{-2}{5} = \underline{-0.4}.$$

Ett punkt er $\underline{(-0.4, 3.6, 0)}$



$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

#4

$|\vec{a}|, |\vec{b}|$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

$4 \cdot 5 (-1/2) = -10$

$\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

linear

$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = (2\vec{a}+3\vec{b}) \cdot (2\vec{a}+3\vec{b})$

$= 4\vec{a}\cdot\vec{a} + 9\vec{b}\cdot\vec{b} + 12\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 12(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$|\vec{u}|^2 = 4 \cdot 4^2 + 9 \cdot 5^2 + 12(-10)$

$|\vec{v}| \ldots$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots$