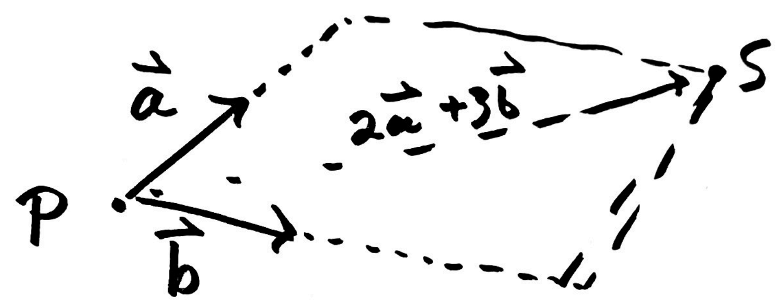
3.3.2023

Parametrisering av plan i rommet



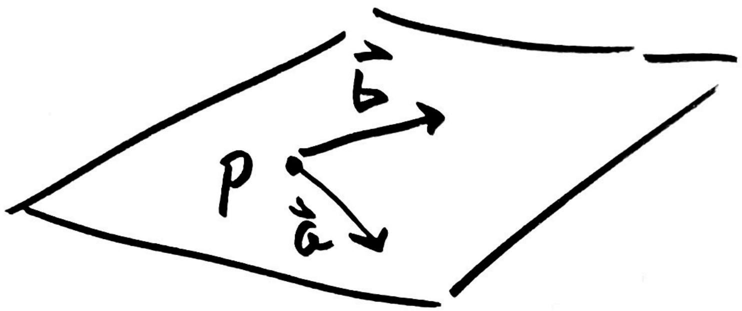
Planet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som inneholder punktet P.

($\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ikke parallelle)

$S(x,y,z)$ ligger i planet:

$$[x,y,z] = \vec{OS} = \vec{OP} + s\vec{a} + t\vec{b} \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

eks: Beskriv planet som går gjennom $A(1,0,2)$ $B(3,-1,2)$ og $C(3,4,5)$



Likning for planet: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ er en normalvekta til planet.

(x, y, z) er i planet

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P(x,y,z)} \bullet \vec{n} = 0$$

$$[x, y, z] \cdot \vec{n} = \underbrace{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}}$$

$$ax + by + cz = d \quad , \quad \vec{n} = [a, b, c]$$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [3,-1,2] - [1,0,2] = [2,-1,0]$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [3,4,5] - [1,0,2] = [2,4,3]$

er vektorer i planet

Velger punktet A i planet.

Parametrisering: $[x,y,z] = \vec{OA} + s\,\vec{AB} + t\,\vec{AC}$

$[x,y,z] = [1,0,2] + s[2,-1,0] + t[2,4,3]$

$$\begin{cases} x = 1 + 2s + 2t \\ y = -s + 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Likning for planet:

$$\vec{n} = [2,-1,0] \times [2,4,3] = \begin{array}{ccc} (+ & - & +) \end{array} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = [-3,-6,10]$$

$$\vec{n} \cdot [x, y, z] = \vec{OA} \cdot \vec{n} = [1, 0, 2] \cdot [-3, -6, 10]$$

$$-3x - 6y + 10z = 17$$

Gitt en likning for et plan

$$2x + y - 4z = 8$$

Finn en parametrisering av planet.

Velger to ikkje-parallelle vektorer i planet og et punkt i planet.

En normalvektor til planet er $[2, 1, -4]$

$\vec{a} = [1, -2, 0]$ $\quad\quad$ $\vec{b} = [0, 4, 1]$

$P(0, 0, -2)$ ligger i planet.

$$[x,y,z] = \vec{OP} + s\vec{a} + t\vec{b}$$
$$= [0,0,-2] + s[1,-2,0] + t[0,4,1]$$

OPG. Parametrisert linje $\vec{OP}$ $\quad \vec{r} = \vec{n}$

$$[x,y,z] = [1,2,-1] + s[1,1,-2]$$

* Finn en likning for planet vinkelrett på linjen som går gjennom $P(1,2,-1)$.

$$\vec{n} \cdot [x,y,z] = \vec{n} \cdot \vec{OP}$$
$$\underline{x + y - 2z = 5}$$

* Finn en parametrisering for planet.
* Hvor møter linjen $[x,y,z] = [2,2,1] + x[4,3,2]$, $x \in \mathbb{R}$ planet?

Parametrisering $\qquad \vec{n} = [1,1,-2] \qquad P(1,2,-1)$

$\vec{a} = [1,1,1]$ $\qquad$ ($[0,2,1]$ er et annet alternativ)

$\vec{b} = [1,-1,0]$

$$[x,y,z] = \vec{OP} + s\vec{a} + t\vec{b}$$

$$= \underline{[1,2,-1] + s[1,1,1] + t[1,-1,0]}$$

* Setter inn koordinatene til den parametriserte linje i likningen for planet

$$x + y - 2z = 5.$$

$$(2+4x) + (2+3x) - 2(1+2x) = 5$$

$$4 + 4x + 3x - 4x = 5$$

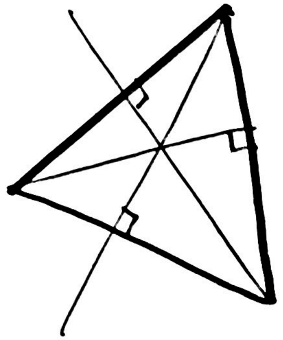
$$\overset{-2}{} \quad 2 + 3x = 5 \iff 3x = 5 - 2 = 3$$

$$x = 1.$$

Snittpunktet $[x,y,z] = [2,2,1] + 1[4,3,2] = [6,5,3]$

$$(x,y,z) = \underline{(6,5,3)}$$

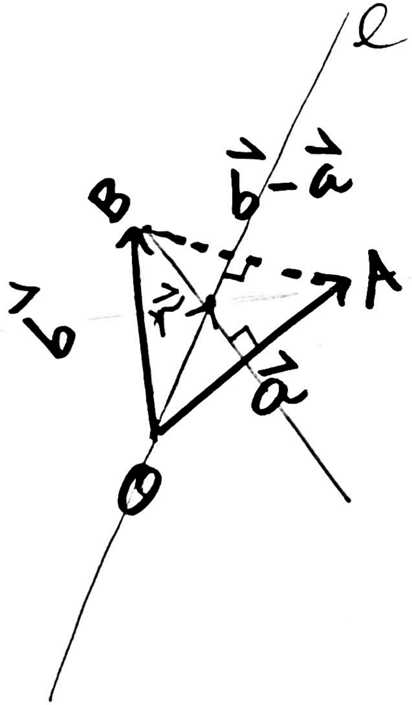
Resultat



De tre linjene fra hvert hjørne i en trekant som er vinkelrette på motstående siden møtes i ett punkt.

$(\vec{r} \neq \vec{0})$

$$\vec{r} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{b} = \vec{r} \cdot \vec{a}$$



Linjen gjennom O : $[x, y, z] = s\,\vec{r}$

snittpunktet på l med linjen gjennom B og $\perp \vec{a}$:

$$\overrightarrow{(x,y,z)B} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\underset{\vec{b}}{\overrightarrow{OB}} \cdot \vec{a} - \underset{s_1\vec{r}}{[x,y,z]} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} - s_1 \vec{r} \cdot \vec{a} = 0$$

Tilsvarende for linjen gjennom A $\perp \vec{b}$

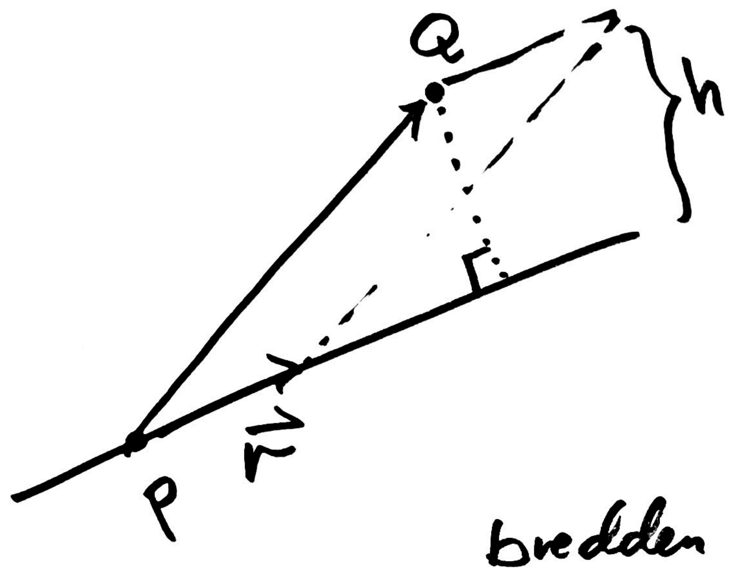
$$\Big(\underbrace{\vec{OA}}_{\vec{a}} - \underbrace{[x, y, z]}_{s_2\vec{r}}\Big) \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - s_2 \vec{r} \cdot \vec{b} = 0$$

$s_1 = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{r} \cdot \vec{a}}$ like side. $\vec{r} \cdot \vec{a} = \vec{r} = \vec{b}$

$s_2 = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{r} \cdot \vec{b}}$ Derfor møtes de tre linjene i ett felles punkt.

Metode I



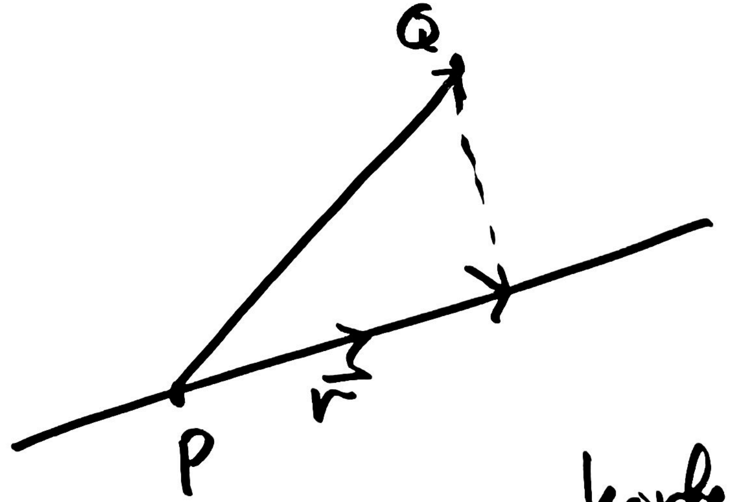
korteste avstand fra Q til linjen er lik høyden i parallellogrammet.

bredden er $|\vec{r}|$

Arealet $|\vec{r} \times \vec{PQ}|$

kortest avstand $h = \dfrac{|\vec{r} \times \vec{PQ}|}{|\vec{r}|}$.

Metode II



$\vec{PQ} = \underbrace{\vec{PQ}_{\parallel}}_{\text{parallell til } \vec{r}} + \underbrace{\vec{PQ}_{\perp}}_{\perp \text{ på } \vec{r}}$

korteste avstand $|\vec{PQ}_{\perp}|$

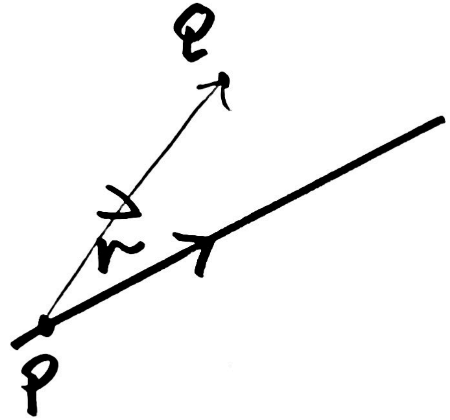
$$(\vec{PQ} - s\vec{r}) \cdot \vec{r} = 0$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{r} - s\,\underbrace{\vec{r} \cdot \vec{r}}_{|\vec{r}|^2} = 0$$

så $$s = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2}$$

$$\vec{PQ}_\perp = \vec{PQ} - \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2}\,\vec{r}$$

Øving Finn korteste avstand mello.



linjen $\begin{cases} P(1,0,-2) \\ \vec{r} = [-3,1,1] \end{cases}$

og punktet $Q(5,6,2)$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = [5,6,2] - [1,0,-2]$$
$$= [4,6,4] = 2[2,3,2]$$

$$\vec{PQ}_\perp = \vec{PQ} - \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2}\vec{r}$$
$$= 2[2,3,2] - \frac{2[2,3,2]\cdot[-3,1,1]}{|[-3,1,1]|^2}[-3,1,1]$$
$$= 2\left([2,3,2] - \frac{-1}{(-3)^2+1^2+1^2}[-3,1,1]\right)$$
$$= 2\left([2,3,2] + \frac{1}{11}[-3,1,1]\right)$$

$$= \frac{2}{11}\left([22, 33, 22] + [-3, 1, 1] \right)$$

$$= \frac{2}{11}\left([19, 34, 23] \right)$$

Korteste avstand mellom Q og linjen

$$\frac{2}{11}\sqrt{(19)^2+(34)^2+(23)^2} = \frac{2}{11}\sqrt{2046}$$

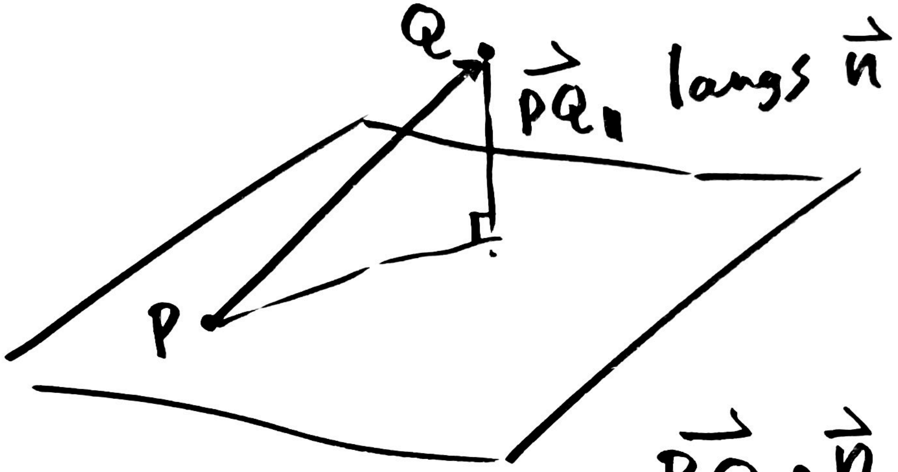
$$\approx 8.2241..$$

Korteste avstand mellom punkt og plan.

$Q(x_0, y_0, z_0)$ plan $ax + by + cz = d$

$\vec{n} = [a, b, c]$ normalvektor

P i planet $\vec{OP} \cdot \vec{n} = d.$



$$\vec{PQ}_{\parallel} = \frac{\vec{PQ}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\,\vec{n}$$

$$|\vec{PQ}| = \left|\frac{\vec{PQ}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\,\vec{n}\right|$$

$$= |\vec{PQ}\cdot\vec{n}| \cdot \frac{|\vec{n}|}{|\vec{n}|^2}$$

$$= \frac{|(\vec{OQ}-\vec{OP})\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

8 variant

Planet vinkelrett på $\vec{n} = [-3, 4, 7]$ som inneholder $P(5, 4, 7)$.

Planet er på formen $ax + by + cz = d$

hvor $[a, b, c] = \vec{n}$

$$-3x + 4y + 7z = d$$

P ligger i planet: $-3(5) + 4(4) + 7(7) = d$

$$-15 + 16 + 49 = d$$

så $\underline{d = 50}$

Planet: $\underline{-3x + 4y + 7z = 50}$